

# Fysik i billard



© Erik Vestergaard

© Erik Vestergaard, 2010.

Billeder:

Forside: ©iStock.com/aviad

Desuden egne illustrationer

## 1. Indledning

Denne note er ment som et tillæg til artiklen *Nogle træk af billardspillet mekanik* af Jens Højgaard Jensen side 145-174 fra *Fysisk Tidsskrift*, 1968, udgivet af *Selskab for Naturlærens udbredelse*. Selv om der er tale om en artikel, der blandt andet er rettet til anvendelse i gymnasiet, er der tale om en teoretisk tung artikel og symbolikken er også noget gammeldags. Derfor er dette tillæg på sin plads. Kun de indledende aspekter af artiklen vil blive omtalt. Desuden vil jeg uden særlig megen forklaring henvise til formler, som hidrører fra teorien for *stive legemers bevægelse*. En god reference her er *Mekanik* af Gunnar Christiansen, Erik Both og Preben Østergaard Sørensen, udgivet af Institut for Fysik, Danmarks Tekniske Universitet, 2002.

I 1835 udgav den berømte fysiker Gaspard-Gustave Coriolis (1792-1843) faktisk en bog, der havde det sigte at give billardspilleren en praktisk vejledning til spillet.

## 2. Mekanik for partikelsystemer

I mange af de formler, man bliver præsenteret for i mekanik i gymnasiet, er det stiltiende forudsat, at man har at gøre med en *partikel*, dvs. man antager at genstanden ingen udstrækning har og at al massen er placeret i et punkt. I mange sammenhænge duer formlerne da også fint, selv om genstanden har en udstrækning, men der er også situationer, hvor antagelserne om at genstanden kan betragtes som en partikel, ikke er brugbar. Lad os sige, at man ønsker at finde den kinetiske energi for en bold, som kastes gennem luften. Da er det ikke tilstrækkeligt bare at lade som om boldens masse er placeret i massemidtpunktet i midten af bolden. Hvis bolden roterer, vil noget af boldens kinetiske energi nemlig være i form af *rotationsenergi*, og den vil der ikke blive taget hensyn til, hvis bolden betragtes som en partikel. Det er derfor man her er nødt til at betragte *partikelsystemer*. Det kan være i form af en række enkeltpartikler eller i form af en *kontinueret* massefordeling. En bold er et eksempel på sidstnævnte. *Stive legemers bevægelse* er teorien, der tager hensyn til genstandenes udstrækning. Ordet *stive* går på at genstanden er en genstand, som ikke ændrer form. Eksempler på objekter, som kan beskrives i teorien er: Cylindre eller kugler, der ruller på et skråplan, en stang, der roterer om en akse, etc.

### Massemidpunktssætningen 1

For et stift legeme med massen  $M$  gælder følgende:

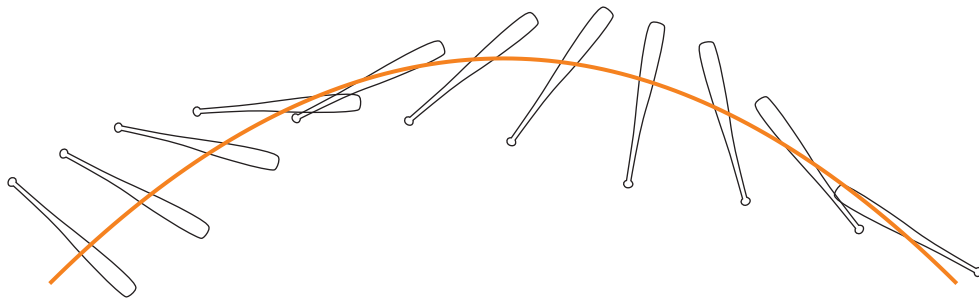
$$(1) \quad M \cdot \vec{a}_C = \vec{F}_{\text{ydre}}$$

hvor  $\vec{a}_C$  er massemidpunktets acceleration og  $\vec{F}_{\text{ydre}}$  er summen af de ydre kræfter på legemet.

*Bevis:* Se [2] side 3-22 til side 3-24.

## Bemærkning 2

Massemidtpunktssætningen minder meget om Newtons 2. lov for en partikel. Grunden til at der kun står de *ydre* kræfter i formelen er, at de *indre* kræfter går ud, når de lægges sammen. Hvis systemet for eksempel består af to kugler, som støder sammen, så vil den ene kugle påvirke den anden med en kraft, men ifølge Newtons 3. lov om *Aktion og reaktion* vil den anden kugle da påvirke den første kugle med en lige så stor og modsat rettet kraft. De kaldes indre kræfter og går ud i beregningerne, når de lægges sammen. Ydre kræfter er derimod kræfter som er påtrykt udefra. Med massemidtpunktssætningen kan man finde bevægelsen af massemidtpunktet (= tyngdepunktet). Hvis man for eksempel kaster et boldtræ i luften, så vil boldtræets massemidtpunkt følge en parabelbane (antaget uden luftmodstand) uanset hvor tovlig boldtræet roterer i sin bevægelse. I dette tilfælde er tyngdekraften den ydre kraft. Hvis man er interesseret i et stift legemes rotation i forhold til massemidtpunktet, så skal man studere *impulsmomentsætningen*, som vi snart kommer til.

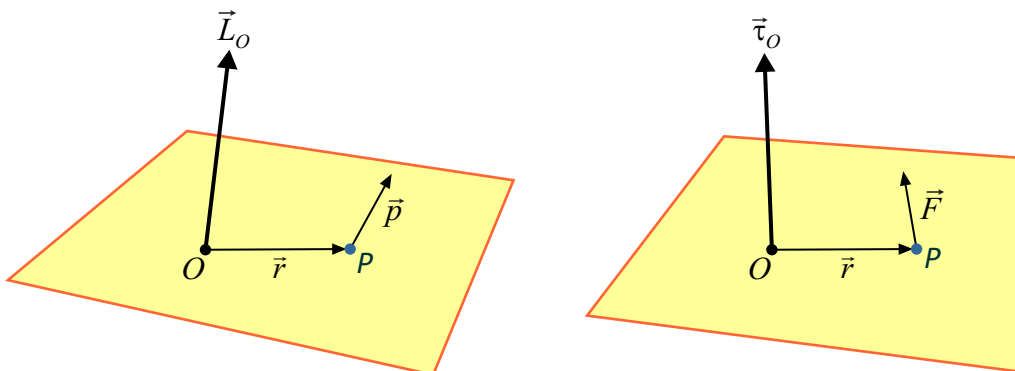


## 3. Impulsmoment og kraftmoment

Vi skal definere et par nye begreber, nemlig *impulsmomentet* og *kraftmomentet*. Indførelsen af dem letter behandlingen af *rotation*. Man kunne have benyttet de sædvanlige fysiske love på hver enkelt massedel i et stift legeme, men det ville være alt for uoverskueligt. Det er her de nye begreber kommer til sin ret. Vi skal dog først definere *impulsmomentet* med hensyn til et *fast* punkt  $O$  for en enkelt partikel med masse  $m$ :

$$(2) \quad \vec{L}_O = \vec{r} \times \vec{p}$$

Egenskaberne for krydsproduktet giver os at  $\vec{L}_O$  er vinkelret på både *radiusvektor*  $\vec{r}$  og *impulsvektoren*  $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$ .



På lignende vis defineres *kraftmomentet* med hensyn til  $O$  ved:

$$(3) \quad \vec{\tau}_O = \vec{r} \times \vec{F}$$

Vi ser at kraftmomentvektoren er vinkelret på såvel radiusvektor som kraftvektoren. Dette fører os nu til en meget vigtig sætning.

**Impulsmomentsætningen 3** (For partikel om fast punkt  $O$ )

Når man differentierer impulsmomentvektoren, så får man kraftmomentvektoren:

$$(4) \quad \frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{\tau}_O$$

*Bevis:* Se [2] side 5-2.

Impulsmomentsætningen kan generaliseres til partikelsystemer (se [2], side 5-6):

**Impulsmomentsætningen 4** (For partikelsystem om fast punkt  $O$ )

Når man differentierer det totale impulsmoment om det *faste* punkt  $O$ , så får man summen af de ydre kræfters kraftmoment.

$$(5) \quad \frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{\tau}_{O,\text{ydre}}$$

Bidraget fra de indre kræfter går ud, ligesom de gjorde i tilfældet med massemidtpunktssætningen. De indre kræfters bidrag behøver man altså ikke tage hensyn til. I praktiske opgaver er det ofte meget mere bekvemt at regne impulsmomenter og kraftmomenter i forhold til massemidtpunktet  $C$  frem for i forhold til et fast punkt. Heldigvis gælder impulsmomentsætningen også her (se [2] side 5-10).

**Impulsmomentsætningen 5** (For partikelsystem om massemidtpunktet  $C$ )

Når man differentierer det totale impulsmoment om massemidtpunktet, så får man summen af de ydre kræfters kraftmoment i forhold til massemidtpunktet.

$$(6) \quad \frac{d\vec{L}_C}{dt} = \vec{\tau}_{C,\text{ydre}}$$

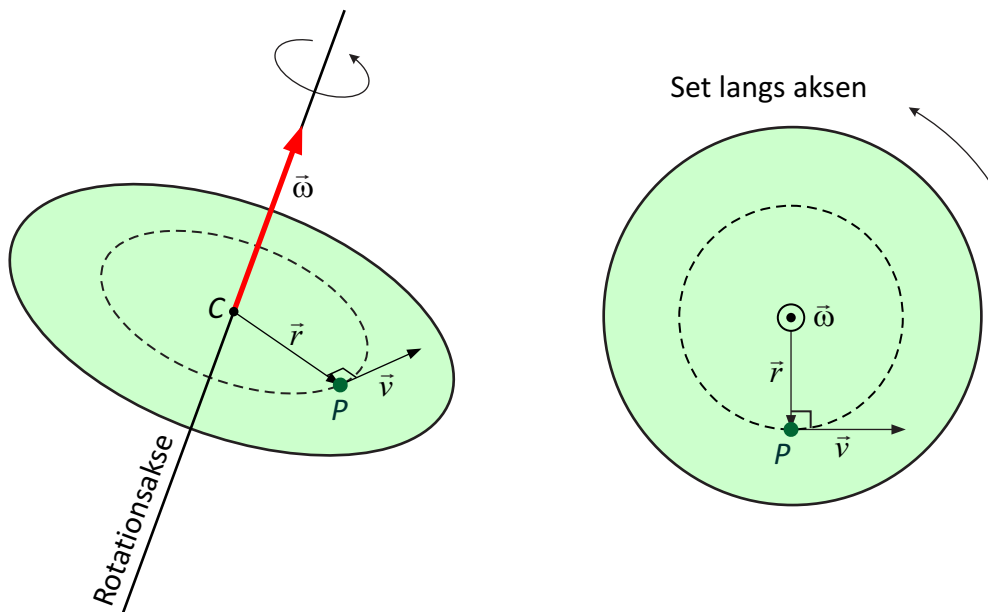
Endvidere kan man vise følgende sammenhæng mellem impulsmomentet om  $O$  og impulsmomentet om massemidtpunktet (se [2] side 5-10):

$$(7) \quad \vec{L}_O = \vec{L}_C + \vec{r}_C \times \vec{P}$$

hvor  $\vec{r}_C$  er stedvektoren fra  $O$  til massemidtpunktet  $C$  og  $\vec{P} = M \cdot \vec{v}_C$  er systemets samlede impuls.

## 4. Rotation

Et stift legeme roterer omkring en fast akse. I dette afsnit skal vi se, hvordan hastighedsvektoren for et punkt  $P$  på dette legeme smart kan opskrives som et krydsprodukt mellem en radiusvektor og en vinkelhastighedsvektor. På figuren nedenfor har vi en skive, som roterer omkring en akse, som går igennem centrum  $C$  og står vinkelret på skiven. Rotationen er beskrevet ved en *vinkelhastighed*  $\omega$ , som eventuelt kan være en funktion af tiden. Vinkelhastigheden angiver, hvor mange radianer der drejes pr. sekund. Vi definerer en vinkelhastighedsvektor  $\vec{\omega}$ , som skal have en længde, som er lig med  $\omega$  og retning parallel med rotationsaksen. Hvilken af de to mulige retninger afgøres derved at  $(\vec{r}, \vec{v}, \vec{\omega})$  skal udgøre en *højreskrue*. Bemærk at symbolet  $\odot$  betyder at en vektor peger ud af papiret, mens symbolet  $\otimes$  betyder at vektoren peger ind i papiret.



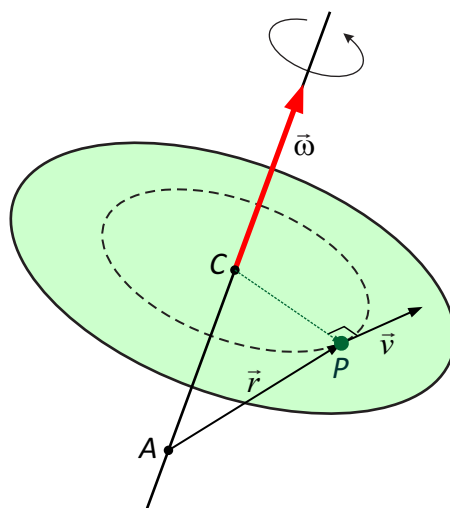
### Øvelse 6

- Vis at farten af punktet  $P$  er lig med  $v = \omega \cdot r$ .
- Vis at  $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ . *Hjælp:* Vis at højresiden i ligningen har den rigtige længde og den rigtige retning.

Faktisk behøver radiusvektor ikke være lig med  $\overline{CP}$  for at  $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$  holder. Ligningen holder også for  $\vec{r} = \overline{AP}$ , hvor  $A$  er et vilkårligt punkt på rotationsaksen. Situationen er vist på figuren på næste side.

### Øvelse 7

Vis at  $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ , når  $\vec{r} = \overline{AP}$ . *Hjælp:* Benyt *indskudsreglen* for vektorer og skriv  $\overline{AP}$  som en sum:  $\overline{AP} = \overline{AC} + \overline{CP}$ . Benyt derefter almindelige regneregler for krydsproduktet. Bemærk at et led går ud!

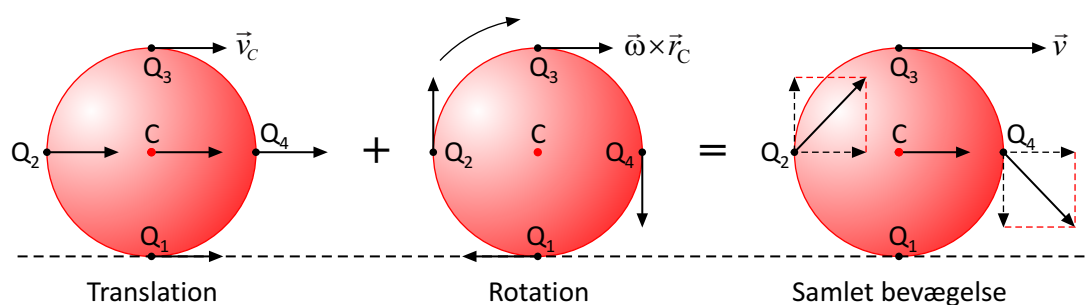


Overfor har vi egentlig slet ikke udnyttet, at punktet  $P$  befinder sig på en skive, så ovenstående smarte udtryk for hastighedsvektoren kan bruges for *ethvert* stift legeme, som roterer om en fast akse.

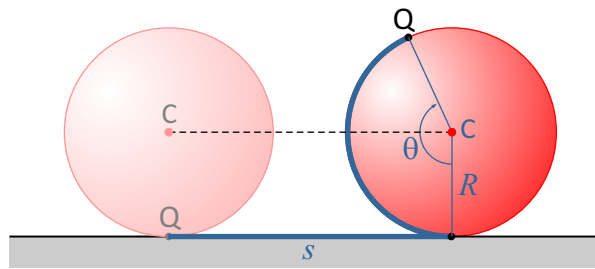
## 5. Rulning og glidning

Man kan vise at enhver bevægelse kan opløses i en rotation samt en translation. En translation er blot en parallelforskydning, hvor alle punkter på legemet har samme hastighed. Når et legeme roterer, vil de punkter, der befinder sig længst væk fra rotationsaksen opleve den største fart. De enkelte punkters hastighed vil også typisk have forskellig retning.

Rullende kugle, ren rulning



Et godt eksempel er en billardkugle, der ruller på et vandret bord. Vi forestiller os at kuglen kommer fremad, så der er en translation til stede. Massemidpunktets hastighed betegnes  $\vec{v}_C$ . Vi forestiller os endvidere, at kuglen ikke blot glider, men også roterer. Dermed har vi en sammensat bevægelse. Men selv det kan foregå på mange måder. Der er et begreb, som hedder *ren rulning*, og det er karakteriseret ved at kuglen kommer nøjagtigt så langt fremad som det oprindelige røringpunkt  $Q$  ruller op på kuglen.



### Øvelse 8

Vis at ren rulning er karakteriseret ved at  $v_C = R \cdot \omega$ . *Hjælp*: Det kan gøres ved først at vise at  $s = R \cdot \theta$  og derefter differentiere, idet det bemærkes, at  $\omega = d\theta/dt$ .

Tilbage til figuren med opløsning af bevægelsen i en translation og en rotation. Figuren illustrerer faktisk tilfældet med ren rulning. Hastighederne af fire forskellige punkter på randen af kuglen er vist. Det særlige ved ren rulning er, at hastigheden af det punkt, som berører bordet har hastighed 0. Man kan sige, at punktet bliver lagt ned på bordet!

### Øvelse 9

Overvej hvordan opløsningen af bevægelsen af den rullende billardkugle ser ud i nedenstående situationer, idet du tegner en figur analog til den på forrige side.

- Kuglen roterer fremefter, men glider samtidig fremad på underlaget.
- Kuglen roterer fremefter, men med ekstra høj rotation - højere end det der svarer til ren rulning.
- Kuglen bevæger sig fremefter, men har *backspin*.

Af ovenstående haves:

#### Hastighedens opsplitting 10

Et stift legemes bevægelse er fuldstændig bestemt af massemidpunktets hastighed  $\vec{v}_C$  og vinkelhastigheden  $\vec{\omega}$ :

$$(8) \quad \vec{v} = \vec{v}_C + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

## 6. Inertimoment

Til at hjælpe bestemmelsen af impulsmomenter har man indført begrebet *inertimoment*. Det betegnes med  $I$ . Har man at gøre med en helt generel bevægelse i rummet, så bliver tingene rigtig komplicerede, men i tilfældet med en såkaldt *plan bevægelse*, hvor legemets massemidpunkt bevæger sig i et plan og vinkelhastigheden  $\vec{\omega}$  er vinkelret på denne, bliver tingene håndterbare. Da kan inertimomentet angives som et tal. Man har da følgende sammenhæng, hvor  $I_C$  er inertimomentet med hensyn til en akse, som går igennem massemidpunktet  $C$  og er parallel med  $\vec{\omega}$ :

$$(9) \quad L_C = I_C \cdot \omega$$



Som et eksempel kan nævnes at en kugle har følgende inertimoment omkring en akse gående igennem centrum:  $I_C = \frac{2}{5}MR^2$ , hvor  $M$  er kuglens masse og  $R$  er dens radius.

### Bemærkning 11

Man kan sige at begreberne *kraft*, *impuls* og *masse* benyttes under udregning af massemidtunktets bevægelse, mens begreberne *kraftmoment*, *impulsmoment* og *inertimoment* benyttes til at redegøre for rotationsproblemer. Og en bestemmelse af *position*, *hastighed* og *acceleration* vil i et rotationsproblem bliver erstattet af bestemmelsen af *vinkel*, *vinkelhastighed* og *vinkelacceleration*.

Inertimomentet er et mål for en genstands modstand mod at ændre vinkelhastighed, altså modstand mod en vinkelacceleration. På samme måde kan massen opfattes som et mål for en genstands modstand mod at ændre hastighed, altså at accelerere.

## 7. Et par analyser af situationer fra billard

Vi skal ud fra massemidtunktssætningen og impulsmomentsætningen udlede nogle interessante egenskaber for en billardkugles bevægelse. Førstnævnte sætning kan sige noget om hastigheden af massemidtunktet, hvorimod sidstnævnte tager sig af rotationen. For at det ikke skal blive alt for kompliceret, vil vi kun kigge på det tilfælde, hvor billardkuglen foretager en retlinjet bevægelse på billardbordet. Det viser sig, at gnidningsmodstanden mellem kugle og billardbordet styrer rotationen. Men forekommer der ren rulning? Vi skal snart besvare dette spørgsmål.

$$(10) \quad \frac{d\vec{v}_C}{dt} = \frac{1}{M} \cdot \vec{F}_{\text{ydre}}$$

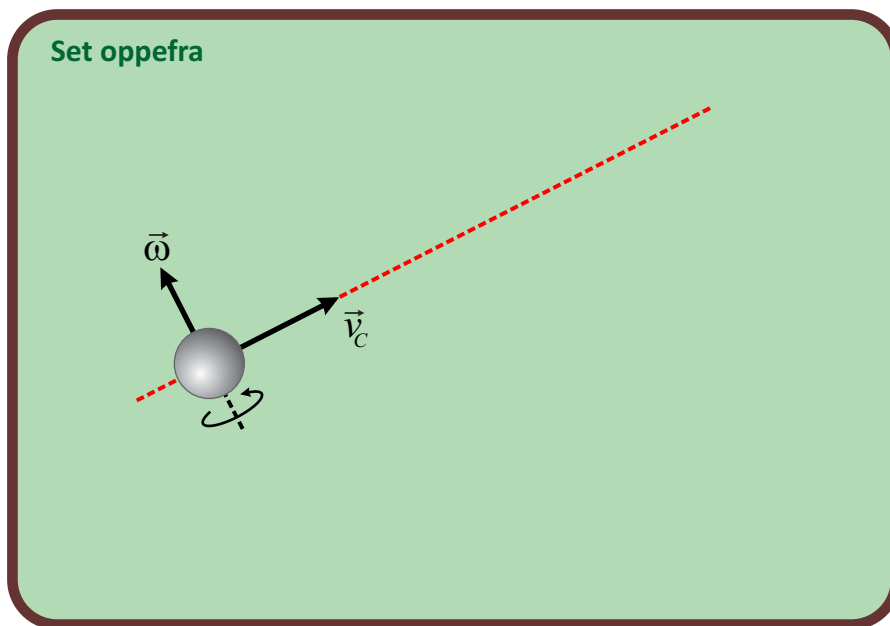
$$(11) \quad \frac{d(R\vec{\omega})}{dt} = \frac{5}{2MR} \cdot \vec{\tau}_{\text{ydre}}$$

### Øvelse 12

Vis at (10) fås af massemidtunktssætningen (1). Vis dernæst, at (11) fås af impulsmomentsætningen. *Hjælp*: Benyt (6) og (9) samt den oplysning at inertimomentet for en kugle omkring en akse gående igennem kuglens centrum er lig med  $I_C = \frac{5}{2}MR^2$ .

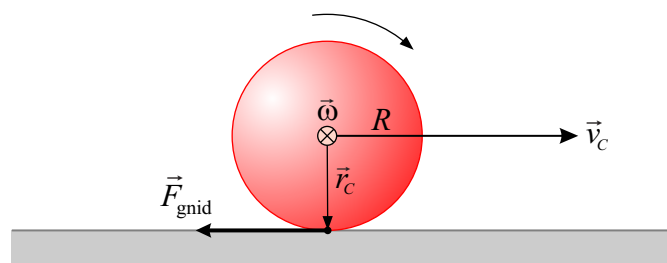
### Retlinjet bevægelse

Vi skal nu kigge på det tilfælde, hvor billardkuglen foretager en retlinjet bevægelse. Det vil af symmetri grunde foregå, hvis kuglens vinkelhastighed  $\vec{\omega}$  står vinkelret på massemidtunktets hastighed  $\vec{v}_C$  til starttidspunktet (Overvej!).



### Eksempel 13

Lad os se på hvad ligningerne (10) og (11) bliver til, hvis vi er i ovenstående situation og yderligere antager at kuglen *roterer lidt langsommere*, end det ville være tilfældet, hvis der var tale om ren rulling – med den samme translatoriske fart. I dette tilfælde vil der foregå en kombination af rulling og glidning og der vil være en bagudrettet *gnidningskraft* af størrelsen  $F_{\text{gnid}} = \mu \cdot F_n = \mu \cdot M \cdot g$ .



Da gnidningskraften er den eneste ydre kraft, der virker, bliver ligningerne (10) og (11) i ovenstående situation til følgende, idet vi nu regner i størrelser med fortegn:

$$(12) \quad \frac{dv_C}{dt} = -\mu g$$

$$(13) \quad \frac{d(R\omega)}{dt} = \frac{5}{2} \cdot \mu g$$

### Øvelse 14

Vis (12) og (13). *Hjælp*: Forklar herunder hvorfor gnidningskraften er bagudrettet. Husk at vinkelhastighedsvektoren  $\vec{\omega}$  går ind i papiret på figuren. Hvis to vektorer er modsat rettede, skal du sætte et minus på, når du går over til at regne i størrelser med fortegn. Er vektorerne derimod ensrettede, så skal fortegnet være positivt.

Betragter man det rent kvalitativt, så udtrykker bevægelsesligningerne (12) og (13), at translationsfarten vil aftage, mens vinkelhastigheden vil vokse i den videre bevægelse, når tiden går. Noget af den kinetiske energi stammende fra translationen bliver altså omsat til rotationsenergi. Gnidningskraften sørger automatisk for det! Medmindre der er tale om ren rulning, så vil der imidlertid også være et tab af kinetisk energi. Tabet vil gå til indre energi i kugle og underlag – på grund af glidningen!

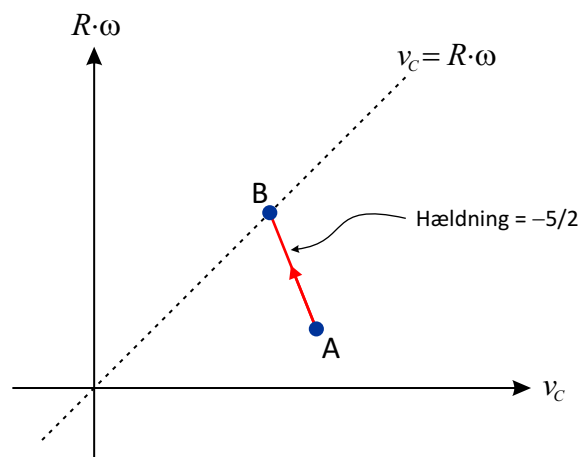
### Øvelse 15

Redegør for hvorfor ovenstående påstand er korrekt.

Vi kan trække mere information ud af bevægelsesligningerne: Vi ser, at hastigheden hvormed vinkelhastigheden ganget med radius vokser med tiden og hastigheden hvormed translationsfarten aftager, forholder sig som 5 til 2:

$$(14) \quad \frac{d(R\omega)/dt}{dv_C/dt} = -\frac{5}{2}$$

Det kan afbildes i et koordinatsystem med translationsfarten på 1. akse og vinkelhastigheden ganget med radius på 2. akse:



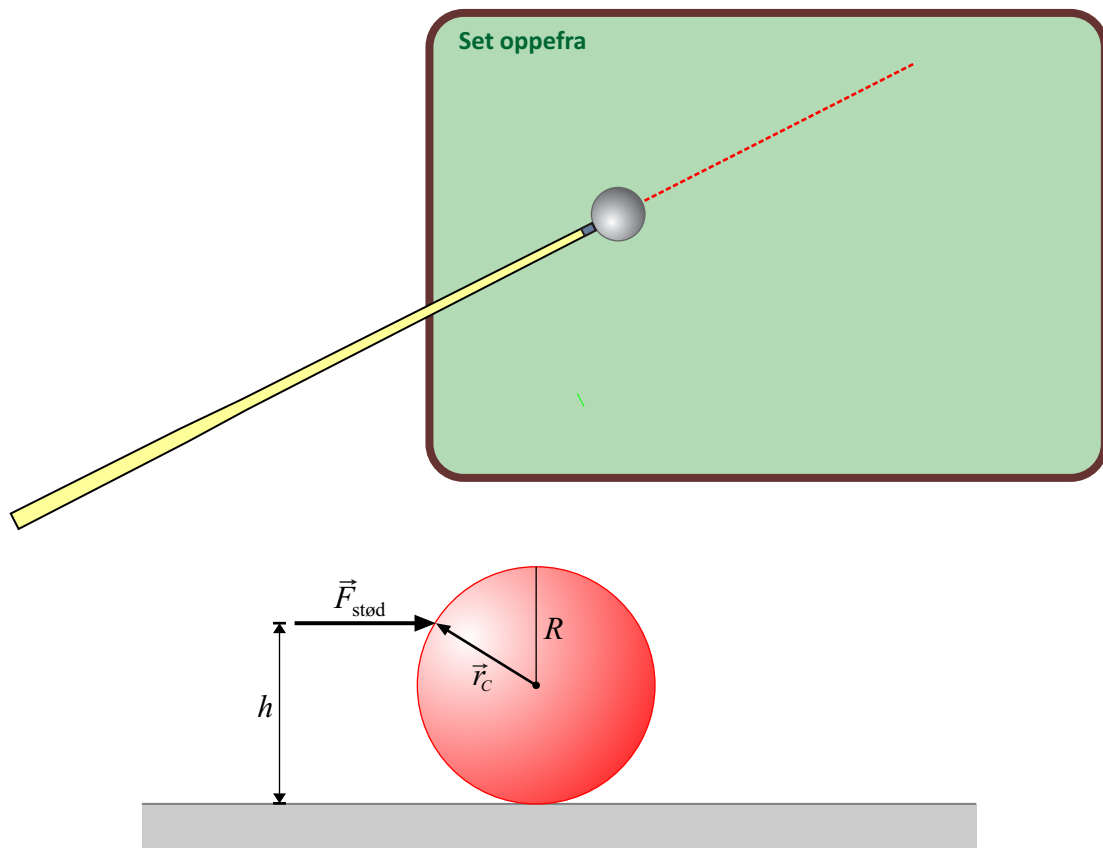
Vi forestiller os her en billardkugle, som har en translationsfart og en vinkelhastighed ganget med  $R$ , som svarer til punktet A på figuren. Når tiden forløber vil kuglen bevæge sig ad linjen gennem A med hældning  $-5/2$  op til linjen  $v_C = R \cdot \omega$ , som svarer til *ren rulning* (overvej!). Se eventuelt opgave 1 i enden af noten for en konkret talopgave i forbindelse med denne problematik.

### Øvelse 16

Gentag argumenterne i eksempel 13 blot for tilfældet, hvor billardkuglen *roterer hurtigere*, end det ville være tilfældet, hvis der var tale om ren rulning – underforstået med den samme translationsfart. Vis at så skifter højresiderne i (12) og (13) fortegn! Hvad betyder det for bevægelsen? Kan du give et eksempel i et  $(R \cdot \omega, v_C)$ -diagram?

## Stød med billardkø

Lad os kigge på det interessante tilfælde, hvor man støder med køen til billardkuglen. For at problemet ikke skal blive for komplekst, vil vi antage, at køen under stødet holdes i et lodret plan gennem kuglens centrum, samt at køen holdes *vandret* deri. Af symmetri Grunde er det klart, at kuglen vil bevæge sig lineært.



For at kunne beskrive situationen entydigt, mangler vi oplysning om den *højde*  $h$ , hvori køen rammer kuglen (se figur) samt om den kraft, der frembringer stødet. Hvad angår sidstnævnte, antager vi, at kuglen ligger stille og derefter i et kort tidsrum  $\Delta t$  bliver påvirket af en kraft  $F_{\text{stød}}(t)$ , som er en funktion af tiden. Når vi i det følgende refererer til *start*-tidspunktet for bevægelsen, vil vi mene det tidspunkt, hvor stødet er fuldt gennemført og billardkuglen forlader køen. Translationsfarten til dette tidspunkt vil vi betegne med  $v_{C,\text{start}}$  og vinkelhastigheden i rotationen til starttidspunktet vil vi betegne med  $\omega_{\text{start}}$ . For at analysere selve stødprocessen vil vi opstille bevægelsesligningerne (10) og (11) i dette konkrete tilfælde. Vi ser bort fra gnidningsmodstandens bidrag til den ydre kraft. Det kan vi tillade os, da langt det største bidrag kan antages at komme fra stødkraften.

$$(15) \quad \frac{d\vec{v}_C}{dt} = \frac{1}{M} \cdot \vec{F}_{\text{stød}}$$

$$(16) \quad \frac{d(R\vec{\omega})}{dt} = \frac{5}{2MR} \cdot (\vec{r}_C \times \vec{F}_{\text{stød}})$$

**Øvelse 17**

Løs følgende opgaver med hensyn til ligning (16):

- a) Vis, at  $|\vec{r}_C \times \vec{F}_{\text{stød}}| = F_{\text{stød}} \cdot (h - R)$ . *Hjælp:* Matematikken siger, at længden af krydsproduktvektoren er lig med arealet af det parallelogram, de to vektorer udspænder.
- b) Vis at vektoren  $\vec{r}_C \times \vec{F}_{\text{stød}}$  peger ind i papiret på ovenstående figur, såfremt  $h > R$  og ud af papiret, hvis  $h < R$ .

**Øvelse 18**

Vis, at bevægelsesligningerne (15) og (16) ved integration giver anledning til følgende:

$$(17) \quad v_{C,\text{start}} = \frac{1}{M} \int_0^{\Delta t} F_{\text{stød}}(t) dt$$

$$(18) \quad R \cdot \omega_{\text{start}} = \frac{5}{2MR} \cdot \int_0^{\Delta t} F_{\text{stød}}(t) \cdot (h - R) dt$$

Det vedtages, at vinkelhastigheden regnes positiv ind i papiret på ovenstående figur.

Lad os kigge på forholdet mellem  $R \cdot \omega_{\text{start}}$  og  $v_{C,\text{start}}$ . Faktoren  $(h - R)$  er en konstant og går udenfor integralet i tælleren:

$$(19) \quad \frac{R \cdot \omega_{\text{start}}}{v_{C,\text{start}}} = \frac{\frac{5}{2MR} \cdot \int_0^{\Delta t} F_{\text{stød}}(t) \cdot (h - R) dt}{\frac{1}{M} \cdot \int_0^{\Delta t} F_{\text{stød}}(t) dt}$$

$$= \frac{\frac{5}{2MR} \cdot (h - R) \cdot \int_0^{\Delta t} F_{\text{stød}}(t) dt}{\frac{1}{M} \cdot \int_0^{\Delta t} F_{\text{stød}}(t) dt}$$

$$= \frac{5}{2} \cdot \frac{h - R}{R}$$

**Eksempel 19**

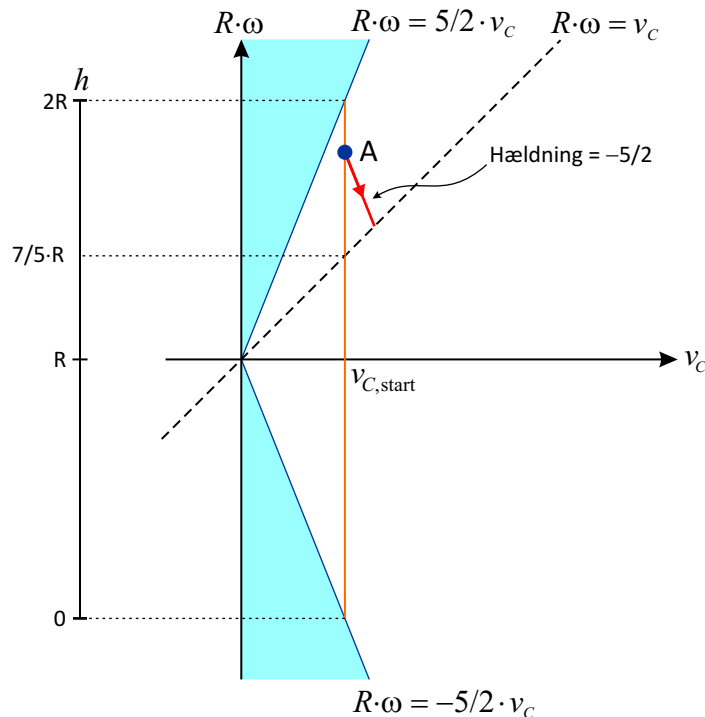
Lad os antage, at vi har udført et stød, så translationsfarten  $v_{C,\text{start}}$  ved start, altså farten umiddelbart efter stødet, er en given kendt værdi. Hvis stødet foregik i højden  $h$  kan vinkelhastigheden ved start,  $\omega_{\text{start}}$ , da beregnes af (19). Af hensyn til senere afbildning lader vi lige radius  $R$  af kuglen stå på venstre side af lighedstegnet:

$$(20) \quad R \cdot \omega_{\text{start}} = \frac{5}{2} \cdot \frac{h - R}{R} \cdot v_{C,\text{start}}$$

Det er oplagt, at  $0 \leq h \leq 2R$ . Lad os antage, at vi stødte ret højt i kuglen, for eksempel i højden  $h = 1,8R$ . Da fås af (20):

$$(21) \quad R \cdot \omega_{\text{start}} = \frac{5}{2} \cdot \frac{h-R}{R} \cdot v_{C,\text{start}} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1,8R-R}{R} \cdot v_{C,\text{start}} = 2,0 \cdot v_{C,\text{start}}$$

Vi kan afbilde punktet i vores sædvanlige  $(R \cdot \omega, v_C)$ -diagram:



Ifølge forrige delafsnit med *Retlinjet bevægelse* vil billardkuglen efter stødet følge den røde linje med hældning  $-5/2$  ned til linjen  $R \cdot \omega = v_C$ , Vi ser at  $v_C$  vokser og  $R \cdot \omega$  aftager. Når denne linje er nået, vil der forekomme *ren rulning*.

### Øvelse 20

I eksempel 19 har vi set, hvad der kvalitativt sker, når  $7/5 \cdot R < h \leq 2R$ . Du skal benytte metoden fra dette eksempel til at overveje hvad der kvalitativt sker, når kuglen rammes i forskellige andre højder  $h$ . Altså vokser eller aftager  $v_C$  og vokser eller aftager  $\omega$ ? Kan der forekomme ren rulning fra starten? Kan  $v_C$  eller  $\omega$  blive negative?

- $h = 7/5 \cdot R$
- $R \leq h < 7/5 \cdot R$
- $0 \leq h < R$

### Øvelse 21

Vis at en starttilstand i det skraverede område af  $(R \cdot \omega, v_C)$ -diagrammet umuligt kan forekomme. *Hjælp*: Man kan først bruge  $0 \leq h \leq 2R$  og (20) til at vise, at der gælder følgende ulighed:  $-5/2 \cdot v_{C,\text{start}} \leq R \cdot \omega_{\text{start}} \leq 5/2 \cdot v_{C,\text{start}}$ .

Vore krav til stødet ovenfor gør det faktisk *umuligt* at støde til kuglen, så kuglen først løber frem og derefter tilbage igen! Det ville nemlig kræve, at  $v_C$  på et tidspunkt blev negativ, og det kan kun forekomme, hvis man starter et sted i det blå skraverede område i  $(R \cdot \omega, v_C)$ -diagrammet (Overvej!). En sådan starttilstand er ifølge øvelse 21 en umulighed. Slækker man imidlertid på kravet om at stødet skal være vandret, så kan den ønskede bevægelse frembringes ved at støde skråt ned i kuglen i en højde, som er mindre end  $R$ . Derved kan kuglen opnå et tilstrækkeligt stort *backspin* i forhold til den fremadrettede translationsfart til, at der stadig vil være lidt backspin tilstede efter en del er benyttet til at opbremse kuglens fremadrettede bevægelse.

## Opgaver

### Opgave 1

En billardkugle har radius  $R = 2,8$  cm og forlader køen med en translationsfart på  $v_C = 1,65$  m/s og en rotation med vinkelhastighed  $\omega = 40$  s<sup>-1</sup> (radianer pr. sekund!). Rotationsaksen er fra start vinkelret på translationshastigheden, så bevægelsen forløber lineært. Vi er i samme situation som i eksempel 13.

- Indtegn startpunktet A for bevægelsen i et  $(R \cdot \omega, v_C)$ -diagram ligesom det blev gjort på side 11.
- Bevægelsen vil gå over i en ren rulning efter lidt tid. Beregn koordinaterne til det punkt B, som svarer til denne situation. *Hjælp:* Husk at B er skæring mellem den linje, som har hældning  $-5/2$  og som går igennem A, og diagonallinjen karakteriseret ved ren rulning.
- Hvor lang tid går der før ren rulning indtræffer? *Hjælp:* Du kan bruge ligning (12) til at beregne det!

---

## Litteratur

- [1] Jens Højgaard Jensen. *Nogle træk af billardspillets mekanik*. Fysisk Tidsskrift, 1968, siderne 145-174.
- [2] Gunnar Christiansen, Erik Both og Preben Østergaard Sørensen. *Mekanik*. Danmarks Tekniske Universitet, 2002.

## Links

<http://www.real-world-physics-problems.com/physics-of-billiards.html>

<http://billiards.colostate.edu/physics/index.html>

<http://www.jimloy.com/billiard/phys.htm>