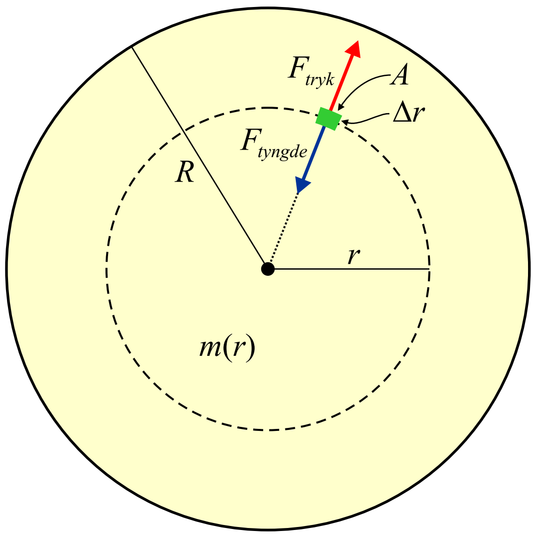
Hydrostatisk ligevægt

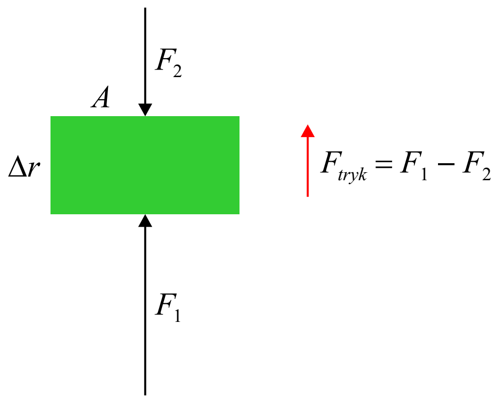
Dette er et tillæg til den lille bog *De dynamiske stjerner* af Hans Kjeldsen og Torben Arentoft, Fysikforlaget, 2009. Vi vil behandle dele af siderne 7-19. Her nogle velkendte fysikformler, som skal i spil:

Gravitationsloven: (1) $F = -G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$	Masse er massefylde gange volumen: (2) $m = \rho \cdot V$
Kraft er tryk gange areal: (3) $F = P \cdot A$	Differentialkvotienten er ca. lig med differenskvotienten, hvis tilvæksten Δr er lille: (4) $P'(r) \approx \frac{\Delta P}{\Delta r}$

Involverede størrelser

$P(r)$ Tryk i afstanden r fra centrum.
$P'(r)$ Udtrykker den øjeblikkelige hastighed, hvormed trykket ændrer sig, når radius ændres.
$m_{element}$ Massen af det lille masseelement.
$m(r)$ Massen af stoffet indenfor en radius af r fra centrum C.
$\rho(r)$ Massefylden i afstanden r fra C.
A Arealet af ydersiden af masseelementet.
ΔP Trykket på ydersiden af masseelementet minus trykket på indersiden af masseelementet.





Den resulterende kraft på masseelementet - regnet positiv udefter - fås ved at trække den indadrettede tyngdekraft fra den kraft, som er forårsaget af trykforskellene i gassen.

$$
\begin{aligned}
F_{res} &= F_{tryk} - F_{tyngde} \\
&= -\Delta P \cdot A \; - \; G \cdot \frac{m(r) \cdot m_{element}}{r^2} \\
&= -\frac{\Delta P}{\Delta r} \cdot \Delta r \cdot A \; - \; G \cdot \frac{m(r) \cdot \rho(r) \cdot V_{element}}{r^2} \qquad (5) \\
&\approx -P'(r) \cdot \Delta r \cdot A - G \cdot \frac{m(r) \cdot \rho(r) \cdot \Delta r \cdot A}{r^2} \\
&= \Delta r \cdot A \left(-P'(r) - G \cdot \frac{m(r) \cdot \rho(r)}{r^2} \right)
\end{aligned}
$$

Kommentarer

Linje 2: Der er et tryk P_2 på oversiden og et tryk P_1 på undersiden af elementet. Det giver ifølge formel (3) anledning til to kræfter F_2 og F_1. Trykkraften fås da som forskellen mellem kraften på oversiden og kraften på undersiden (se figuren):

$$F_{tryk} = F_1 - F_2 = P_1 \cdot A - P_2 \cdot A = (P_1 - P_2) \cdot A = -(P_2 - P_1) \cdot A = -\Delta P \cdot A$$

Det andet led i linje 2: Vi skal bruge formel (1). Egentlig er elementets masse påvirket af alle de øvrige masser i gassen, men man kan vise (svært), at de bidrag, som stammer fra masser udenfor en radius på r går ud med hinanden. Derfor er den masse, som er i spil, kun den masse, som befinder sig indenfor en radius på r, nemlig $m(r)$.
Linje 3: I første led divideres og ganges med Δr. I andet led er formel (2) benyttet.
Linje 4: I første led er egenskaben (4) er benyttet. I andet led er volumenet omskrevet til areal gange højde.
Linje 5: Det ses, at $\Delta r \cdot A$ er en fælles faktor, og den sættes udenfor parentes.

Fortolkning af (5)

Gassen vil trække sig sammen, udvide sig eller holde sig i ro alt efter om F_{res} er negativ, positiv eller 0. Det giver ifølge (5):

$$-P'(r) - G \cdot \frac{m(r) \cdot \rho(r)}{r^2} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad -P'(r) < G \cdot \frac{m(r) \cdot \rho(r)}{r^2} \quad \text{(Gassen trækker sig sammen)}$$

$$-P'(r) - G \cdot \frac{m(r) \cdot \rho(r)}{r^2} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad -P'(r) > G \cdot \frac{m(r) \cdot \rho(r)}{r^2} \quad \text{(Gassen udvider sig)}$$

$$-P'(r) - G \cdot \frac{m(r) \cdot \rho(r)}{r^2} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad -P'(r) = G \cdot \frac{m(r) \cdot \rho(r)}{r^2} \quad \text{(Hydrostatisk ligevægt)}$$

Bemærk at eftersom trykket er størst i centrum og aftager udefter, så er $P'(r)$ negativ. Dermed vil $-P'(r)$ være positiv.

Anvendelser

Man kan arbejde videre med formlen for hydrostatisk ligevægt med henblik på at nærmere at kunne udtale sig om kriterier for, hvornår gassen trækker sig sammen eller udvider sig. Her skal idealgasligningen $P \cdot V = N \cdot k_B \cdot T$ involveres. Efter lange regninger side 13-14 kommer man frem til en såkaldt *Jean-længde* R_J. Hvis radius af en gassky er større end Jean-længden, så vil gassen påbegynde en sammentrækning. Hvis man inddrager sammenhængen mellem radius, massefylde og masse, så kan endvidere udlede et udtryk for *Jean-massen* M_J. Hvis en sky har en masse, som er større end jean-massen, så vil gasskyen trække sig sammen.

En typisk udvikling

Side 14-15 er forløbet af en typisk gassky beskrevet. I starten er gasskyen utrolig tynd. Da massen af skyen er tilstrækkelig stor trækker sig den sig sammen. I begyndelsen foregår der ingen temperaturstigning i skyen. Tabet i potentiel energi ved sammentrækningen omsættes fuldstændig til stråling. Densiteten vokser naturligvis.

Efterhånden vil mindre og mindre dele af skyen selvstændigt begynde at trække sig sammen. Det stemmer fint med, at Jean-massen løbende bliver mindre når densiteten stiger, hvorved mindre gas-masser bliver ustabile. Det resulterer i en fragmentering af skyen Efterhånden vil Jean-massen blive så lille, så skyen ender med at blive delt op i fragmenter med masser, som går fra under 1/10 af Solens masse til flere gange Solens masse.

På et tidspunkt er gassen lidt tykkere og mere uigennemsigtig. Det bevirker, at al den frigjorte energi ikke alene går til stråling, men også forårsager en opvarmning af skyen, eftersom den frigjorte energi ikke kan passere uhindret igennem. Sammen med temperaturen vokser trykket i gasskyen også. Trykket fra gassen vil efterhånden stoppe sammentrækningen. En stjerne er dannet.

Stjernens overflade er relativ varm. Derfor vil den lyse og udsende energi. Det betyder at stjernen langsomt vil tappes for energi. For at forblive i ligevægt må stjernen derfor langsomt trække sig sammen. Bemærk dog, at selv om den trækker sig *langsomt* sammen, kan der sagtens være tale om hydrostatisk ligevægt! Stjernen er endnu en *protostjerne*.

Hvis temperaturen i centrum bliver stor nok, typisk nogle millioner grader kan spontan fusion foregå, ikke før. Denne tilstand kan opnås efter protostjernen (langsomt) har trukket sig tilpas meget sammen indtil forholdet mellem masse og radius er tilstrækkeligt stor. Når (hvis) fusionsprocesserne går i gang er protostjernen blevet til en rigtig stjerne.