## En ikke-differentiabel funktion

Vi skal i dette tillæg kigge på en funktion, som *ikke* er differentiabel, nærmere bestemt den funktion, som går under betegnelsen *numerisk x* og som kan skrives ved følgende gaf­­felforskrift:

 

Den skrives også ofte . Grafen ser således ud:



Vi skal vise, hvorfor funktionen *ikke* er differentiabel i . Vi starter med at kigge på differenskvotienten:

(1) 

For at undersøge hvad der sker, når , er vi nødt til at splitte op i to tilfælde, fordi vi har at gøre med en gaffelforskrift. Lad os først undersøge, hvad der sker, når  nær­mer sig til 0 fra højre, hvilket vi skriver som . Når  er positiv, gælder den før­ste del af gaffelforskriften, dvs. . Dermed fås:

(2) ****

Lad os dernæst kigge på, hvad der sker, når  nær­mer sig til 0 fra venstre, hvilket vi skriver som . Når  er negativ, gælder den anden del af gaffelforskriften, dvs. . Dermed fås:

(3) ****

Vi ser at differenskvotienten har forskellige grænseværdier, alt efter hvordan  nær­mer sig til 0. Definitionen af differentialkvotient kræver, at det er den *samme* græn­se­vær­­di man har uanset, hvordan man nærmer sig til 0. Derfor må vi konkludere, at funk­tio­nen *ikke* er differentiabel i .

#### Bemærkning 1

Problemet i  er, at man i dette punkt ikke kan tegne en tangent til grafen, fordi gra­fen har et *knæk* her. Man kan lidt løst sige, at hvis grafen er ”glat”i et punkt, så er den også differentiabel her. Faktisk er funktionen ovenfor differentiabel i alle andre punk­ter end , fordi man kan tegne en tangent her. Overvej hvad tangentens hæld­ning er i punk­ter til højre for 0? Samme spørgsmål i punkter til venstre for 0?

#### Bemærkning 2

Vi har tidligere kigget på en sætning, som siger at hvis en funktion *f* er differentiabel i et punkt , så er funktionen også kontinuert i dette punkt. Ovenstående funktion er et *mod­eksempel* til hypotesen om at sætningen skulle gælde den modsatte vej. Man kan alt­så *ikke* slutte, at hvis en funktion er kontinuert i et punkt, så er den også dif­fe­ren­tia­bel i dette punkt. Vores funktion ovenfor er klart kontinuert i ethvert punkt, da grafen er sam­­men­hæn­gende, men funktionen er ikke differentiabel i punktet . Det at være differentiabel er altså en stærkere egenskab end det at være kontinuert!