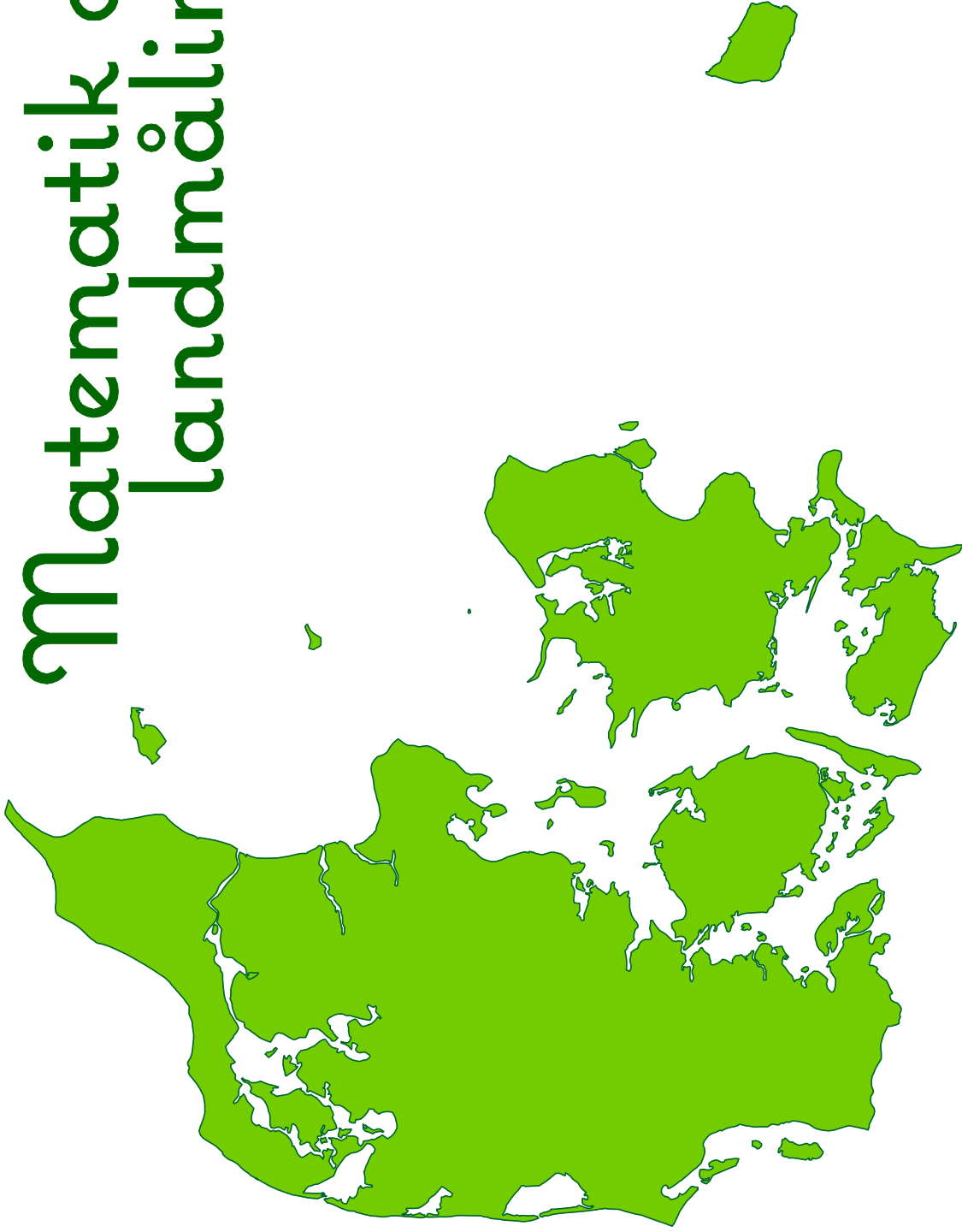


# Matematik og landmåling





## 1. Det første nøjagtige Danmarks kort

Før år 1760 eksisterede der landkort over Danmark, men de var meget upræcise. Det første land, som gik i gang med en mere videnskabelig opmåling af landområder, var Frankrig. Dette arbejde begyndte i 1747. Godt ansporet af det franske eksempel besluttede man i 1761 at foretage en kortlægning af Danmark. Det i 1742 oprettede *Videnskaberne Selskab* førte an i projektet, og i 1761 kunne kongen meddele, at der var bevilget penge til det. En af de ledende skikkelser i arbejdet blev den unge *Thomas Bugge* (1740-1815). Denne var egentlig teolog af uddannelse, men havde ved siden af teologistudierne taget timer i matematik hos en professor i matematik. Vi skal ikke gå mere ind på den ellers meget spændende historie. Den er fremragende beskrevet i [1]. Vi vil gå direkte videre med at studere, hvordan landmålingen blev udført.

## 2. Målemetoderne

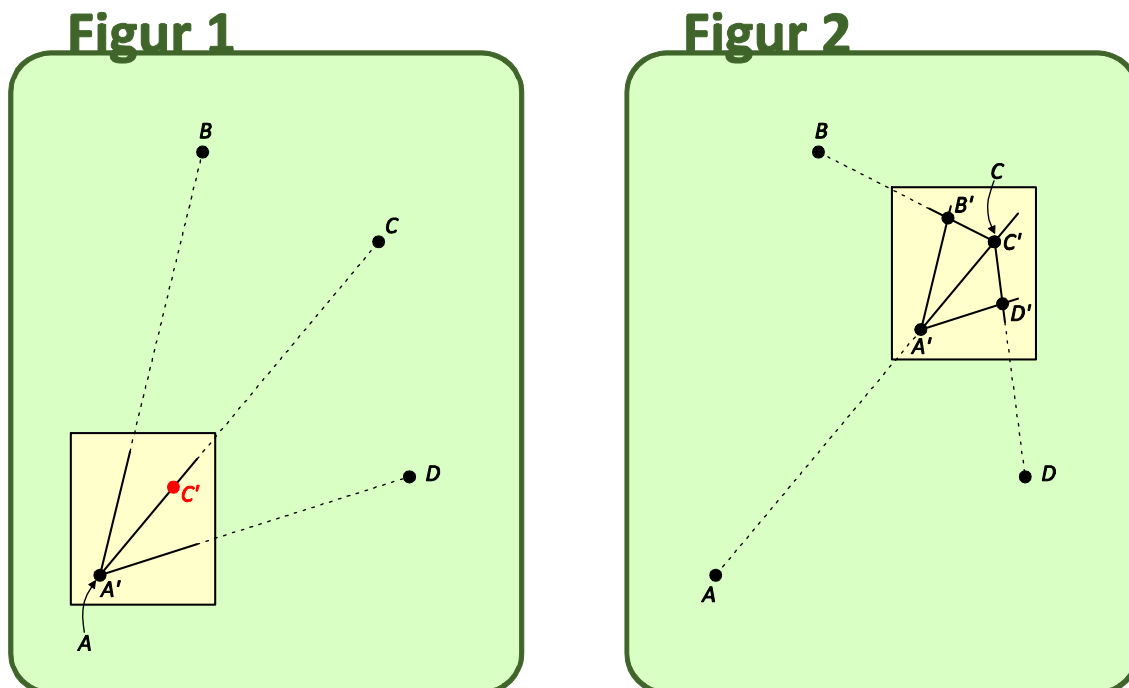
Målet var en serie af landsdækkende kort i målestoksforholdet 1:120.000. Det er vigtigt at forstå, at der er *to* opmålinger involveret: *Den topografiske opmåling* og *trianguleringen*. I den topografiske opmåling opmåles en meget lille del af Danmark – typisk et rektangel på 6,3 km gange 9,4 km. Det sker ved hjælp af et såkaldt *målebord*, som beskrives nærmere i det kommende underafsnit. Trianguleringen består derimod af en række sammenhængende trekanter, dækkende store dele af Danmark. Denne triangulering tjener til at holde styr på de mange mindre kort, så fejl ved sammensætningen af kortene ikke forplanter sig og forøges fra det ene kort til det andet.

### Den topografiske opmåling

Det såkaldte *målebord* var en plade anbragt på et trebenet stativ. Til at sigte med var der anbragt en *dioptrilineal* – en ca. 45 cm lang lineal, som i hver ende havde en opretstående plade med en sigtespalte og en udboring med sigtetråd.



Billedet ovenfor viser et målebord på Steno Museet. I Thomas Bugges tilfælde var det en bordplade på ca. 31 cm gange 47 cm. Da han ønskede at anvende målebordet til at lave en miniatureudgave af landskabet i målestoksforholdet 1:20.000, så svarer det til, at pladen repræsenterer et rektangel på 6,3 km gange 9,4 km i naturen. Princippet i brugen af målebordet er følgende: Lad os sige, at man ønsker at afbilde fire punkter fra naturen på målebordet, nedkopieret med faktoren  $\frac{1}{20.000}$ . Da anbringes målebordet i det første punkt i naturen – det kalder vi  $A$ . Lodret over dette punkt på målebordet afsættes billedpunktet  $A'$ . Man siger, at målebordet har *station* i  $A$ . Man sørger for at målebordet står vandret ved hjælp af en *libelle* (ligesom man finder på et vaterpas). Ved hjælp af diopterlinealen sigter man fra  $A'$  til et nyt punkt i naturen,  $B$ . Sigteretningen tegnes ind på målebordet. Dette gentages for de to øvrige punkter i naturen,  $C$  og  $D$ . Hvis det er ens intention næste gang at tage station i punktet  $C$  i naturen, så skal man først have indtegnet billedpunktet  $C'$  af  $C$  på målebordet. Det gøres ved fysisk at måle afstanden fra  $A$  til  $C$ . Det gjorde Thomas Bugge med en 25 alen (ca. 15 m) lang ståltråds kæde med 100 led og håndtag i enderne. Når afstanden  $AC$  er kendt, kan man finde afstande  $A'C'$  på målebordet ved at dividere afstanden  $AC$  med 20.000. Herefter kan punktet  $C'$  endelig afsættes med en stikpasser på linjen mod  $C$ . Punktet er markeret med rødt på figur 1 nedenfor.

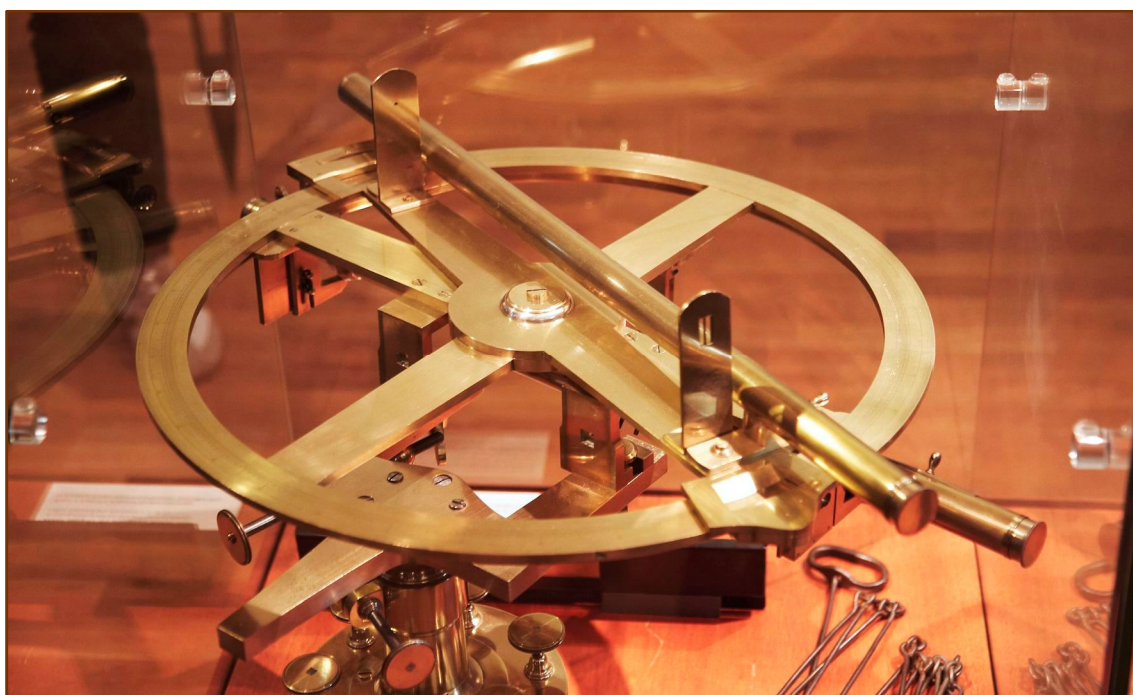


Nu tages station i  $C$  og vi er i situationen vist på figur 2. Målebordet orienteres, så  $A'C'$  sigter mod  $A$ . Derved sikres det, at målebordet blot er blevet parallelforskydet. Dernæst sigter man mod de øvrige to punkter  $B$  og  $D$  og der hvor sigtelinjerne krydser de andre sigtelinjer, konstrueret da målebordet havde station i  $A$ , der findes billedpunkterne, dvs. henholdsvis  $B'$  og  $D'$ . En lille matematisk overvejelse vil godtgøre, at figuren  $A'B'C'D'$  virkelig er en nedkopiering – i matematisk sprog en *ligedannethed* – i forhold til figuren  $ABCD$  i naturen. Overvej eventuelt dette. Blandt vigtige punkter at tegne ind kan nævnes positioner af kirker og herregårde, men der blev også indtegnes andre punkter, som kan fungere som støtte til indtegnning af veje, søer, skove m.m. i hånden.

## Trianguleringen

Man kunne tro, at det ville være tilstrækkeligt blot at foretage de topografiske opmålinger og så stykke alle de små kort sammen til et stort. Det ville imidlertid betyde, at selv ganske små fejl i hvert enkelt kort kunne summere op og blive til større fejl. Et helt konkret problem var det at bladene, der var spændt hårdt ud omkring bordet *krympede*, når de blev skåret fri. Thomas Bugge angav krympningens størrelse til  $\frac{1}{2}$ -1%. Løsningen var at lave en meget nøjagtig *triangulering* af væsentlige dele af Danmark. Derved ville man have et ”stift” skelet af trekanter, som man kunne rette de små kort ind efter. Udover de tre hjørner i hver trekant blev der også bestemt andre vigtige punkter i dette gitter, såsom slotte og kirker. Da disse landskabspunkter også var indtegnet på de små kort, var man i stand til at anbringe de små kort med stor præcision i forhold til trianguleringen.

Til at måle vinkler med i trianguleringens trekanter benyttede man et instrument, som kaldes *det geografiske instrument*. Den var fremstillet af svenskeren *Johannes Ahl* og er vist på billedet nedenfor (Steno Museet).



Instrumentet, der kan måle vinkler i både det lodrette og vandrette plan, har to kikkerter: en fast og en bevægelig. Ved hjælp af disse to kikkerter kunne man måle vinklerne i en trekant, forudsat at instrumentet befandt sig i det ene hjørne af trekanten. Man har vurderet, at man med instrumentet, gennem anvendelse af talrige små fif, typisk målte vinkler med en nøjagtig på 8-9'' (spredning i buesekunder), svarende til ca.  $0,0025^\circ$ .

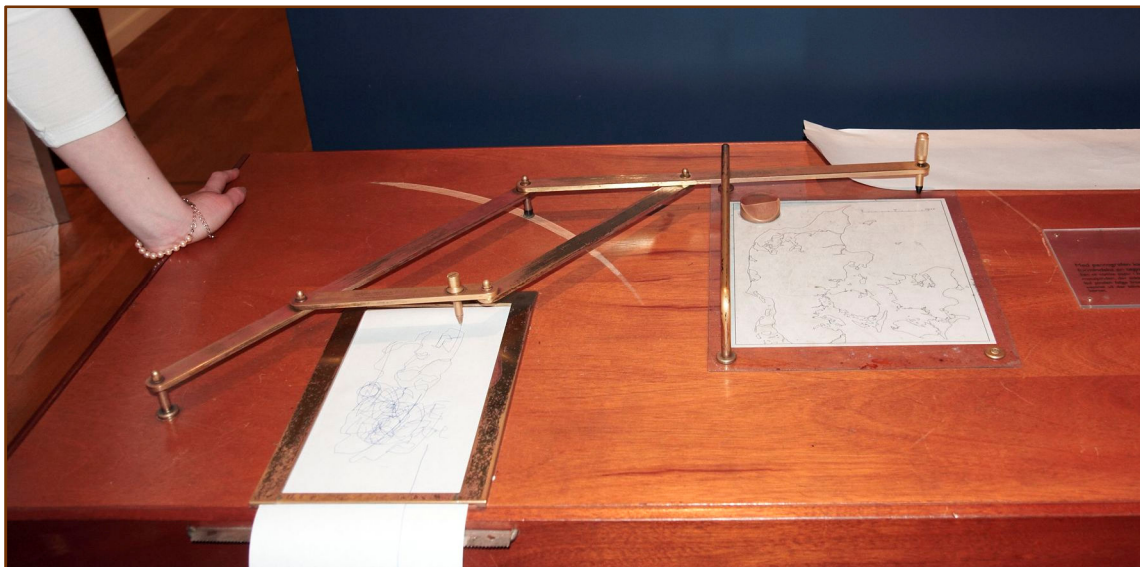
For at kunne foretage beregninger i trekanterne var det nødvendig med en kendt sidelængde i mindst én trekant. Som *basislinje* valgte man en linje fra Brøndby Høj til Tinghøj udenfor det daværende København. Det tredje hjørne i denne første trekant var i øvrigt Rundetårn. Længden af nævnte basislinje blev målt med fire stk. 12 fod lange



målestænger. Hvis terrænet skrånede, måtte stængerne understøttes af små bukke og stillingen kontrolleres med vaterpas. Med *lodsnores* sikrede man, at stænger lå i umiddelbar forlængelse af hinanden vandret betragtet. Basislinjen blev opmålt til 14.515 alen, svarende til ca. 9111 meter. Som Thomas Bugge anførte, betød det faktum, at trekkanterne var store og højdeforskellene i landskabet små, at man ikke behøvede at tage højde for at trekkanterne kunne ligge lidt på skrå. Efter alle vinklerne i trekkanterne i trianguleringen var blevet målt og trekkanternes sider beregnet med udgangspunkt i kendskabet til basislinjens længde, tegnede man trekkanterne over på et kort, det såkaldte *trigonometriske kort*.

### Tingene samles

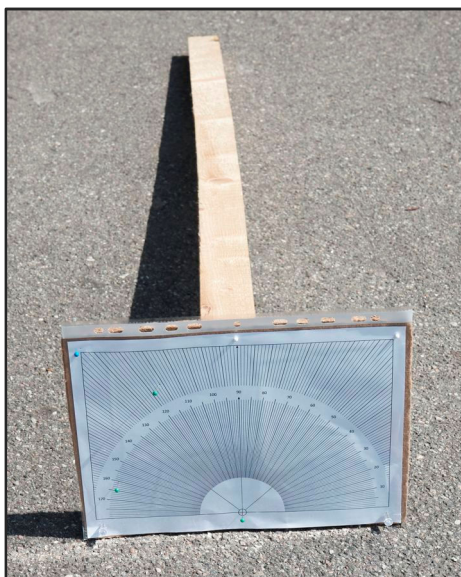
De færdig tegnede målebordsblade blev limet sammen i kanterne og derefter tegnet ned til målestoksforholdet 1:120.000 ved hjælp af en såkaldt *pantograf*. Et sådant instrument fra Steno Museet er vist på fotoet nedenfor.



Alle punkterne i det trigonometriske kort var som tidligere antydnet også afmærket på målebordsbladene. Derved kunne man sammenligne og korrigere fejl. Herefter blev alle detaljerne fra de topografiske kort med de nødvendige korrektioner tegnet ind på det trigonometriske kort. Det endelige kort var hermed færdigt! Mangfoldige detaljer om hele denne historie om Thomas Bugge kan findes i [1].

## 3. Triangulering af Haderslev Dam

Inspireret af Thomas Bugges historiske meritter skal vi undersøge trianguleringsprocessen i praksis. Denne øvelse er efter idé af Lars Thams. Vi vil nøjes med at foretage en triangulering, altså se bort fra målinger med målebord. Trekkanternes vinkler vil blive målt med et simpelt men pædagogisk vinkelmålingsinstrument, ligeledes fremstillet af Lars Thams. Herefter vil vi ud fra opmåling af længden af en *basislinje* beregne de resterende sider og vinkler i hele trianguleringen, blandt andet ved hjælp af sinus- og cosin-

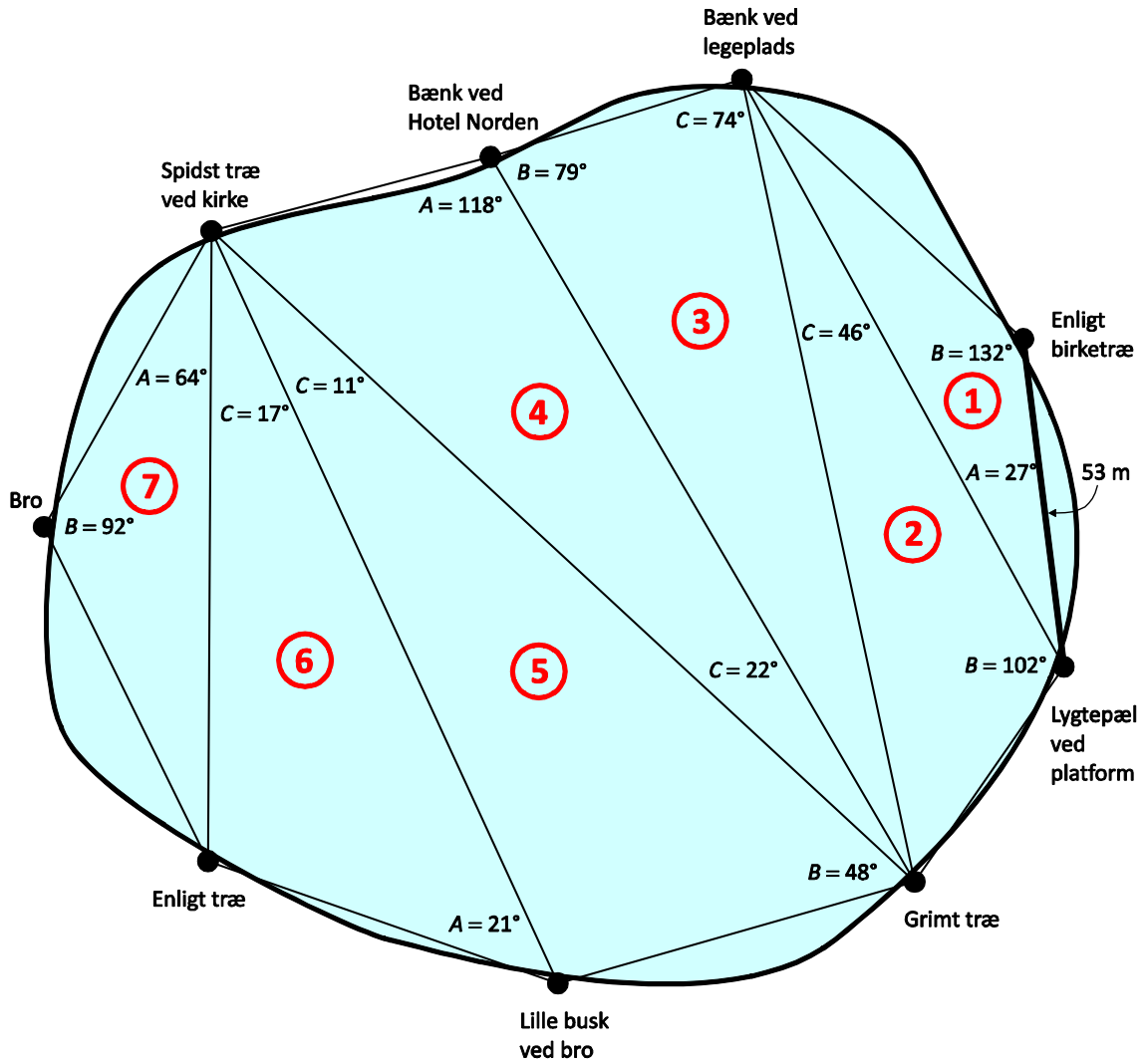


nusrelationerne. Som vist på billedet til venstre, er der tale om en lægte, hvorpå der er placeret en plade med en vinkelinddeling. Brugere, som skulle være interesseret i en sådan vinkelinddeling, kan finde den i slutningen af denne note. Det er fornuftigt at anbringe papirarket i en plastiklomme for beskyttelse mod regn og slid. I halvcirkelens centrum anbringes en nål (eller høj tegnestift), her kaldet *den centrale nål*. Herefter placeres yderligere to nåle, som hver især sammen med den centrale nål sigter ud mod hvert af de øvrige to hjørner i trekanten. Det er her underforstået, at hele instrumentet er placeret i det tredje og sidste hjørne i trekanten. Den vinkel,

som de tre nåle tilsammen danner, er den ønskede vinkel.

### Fremgangsmåde

1. Gå en tur omkring dammen for at finde egnede punkter som hjørner i de trekanter, som skal udgøre trianguleringen. Da vi ønsker at kunne danne os et indtryk af dammens form, vil det være naturligt at vælge punkter tæt på dammens bred. Sørg for at man kan sigte til de relevante punkter, altså at de ikke er skjulte. Vælg efter rundturen en triangulering, og lav en skitse heraf. Det vil være rimeligt med 6-8 trekanter. Det gør ikke noget at skitsen er ret upræcis – den tjener kun til at man kan holde styr på sine trekanter og hvordan de hænger sammen. Giv gerne punkterne sigende navne, så man kan huske dem, når man skal til at måle vinkler. Foretag endvidere en nummerering af trekanterne. Et eksempel på en skitse er givet på næste side.
2. Vælg en basislinje og mål længden af den med et langt målebånd på fx 50 meter. I eksemplet er basislinjen markeret med fed.
3. Benyt vinkelmålingsinstrumentet til at måle mindst to vinkler i hver trekant og tegn talværdierne ind på skitsen sammen med en bogstavbetegnelse. Når vinklerne måles, er det fornuftigt at lade én elev kigge i den ene retning og en anden elev kigge i den anden retning. Hvis én person skal klare det hele, kommer denne nemt til at dreje instrumentet fra det ene sigte til det andet!
4. Du er nu klar til at beregne: Benyt vinkelsummen i en trekant til at beregne de vinkler, som ikke allerede er målt. Anvend herefter sinus- og cosinusrelationerne til at beregne de ukendte sider ved at gå fra trekant til trekant i trianguleringen. Faktisk kan man nøjes med at bruge sinusrelationen (overvej!). Skriv værdierne for siderne og vinklerne for hver trekant ind i skemaet på næste side.
5. Vælg et målestoksforhold og konstruer herefter med *passer og lineal* (vinkelmåler er forbudt!) hele trianguleringen på et stykke papir. Skitsen giver overblikket!
6. Til slut kan du afprøve, hvor god din opmåling er ved at finde Haderslev Dam på *Google Maps*. Hvis du har forstand på det, kan du måske få computeren til at lægge en scanning af trianguleringen oveni billedet fra *Google Maps*!
7. Overvej fejlkilder og giv forslag til mere præcise metoder.



Trekant nr.	Vinkler			Sider		
	A	B	C	a	b	c
1						
2						
3						
4						
5						
6						
7						
8						
9						
10						



## Litteratur

- [1] Keld Nielsen. *Hvordan Danmarkskortet kom til at ligne Danmark – Videnskaber-nes Selskabs opmåling 1762-1820*. Foreningen Videnskabshistorisk Museums Ven-ner, 1989.
- [2] Einar Andersen. *Thomas Bugge – Et mindeskrift i anledning af 150 årsdagen for hans død 15. januar 1815*. Geodætisk Instituts Forlag, København 1968.
- [3] Jens Pilegaard Hansen. *Geometri – Obligatorisk niveau*. Forlaget Frederiksund Arbejdsgruppen ApS (FAG), 2. udgave 1987. Siderne 80-85.
- [4] Ole Jacobi. *Digital Kortlægning*. Institut for Landmåling og Fotogrammetri, Dan-marks Tekniske Højskole og Danmarks Ingeniør Akademi, 2. udgave 1993.
- [5] Else Mærsk-Møller, Poul Frederiksen. *Landmåling – Elementudjævning*. Den pri-vate ingeniørfond ved Danmarks tekniske Højskole, 1984.

## Links

[www.metermanden.dk](http://www.metermanden.dk)

[www.geomat.dk](http://www.geomat.dk)

