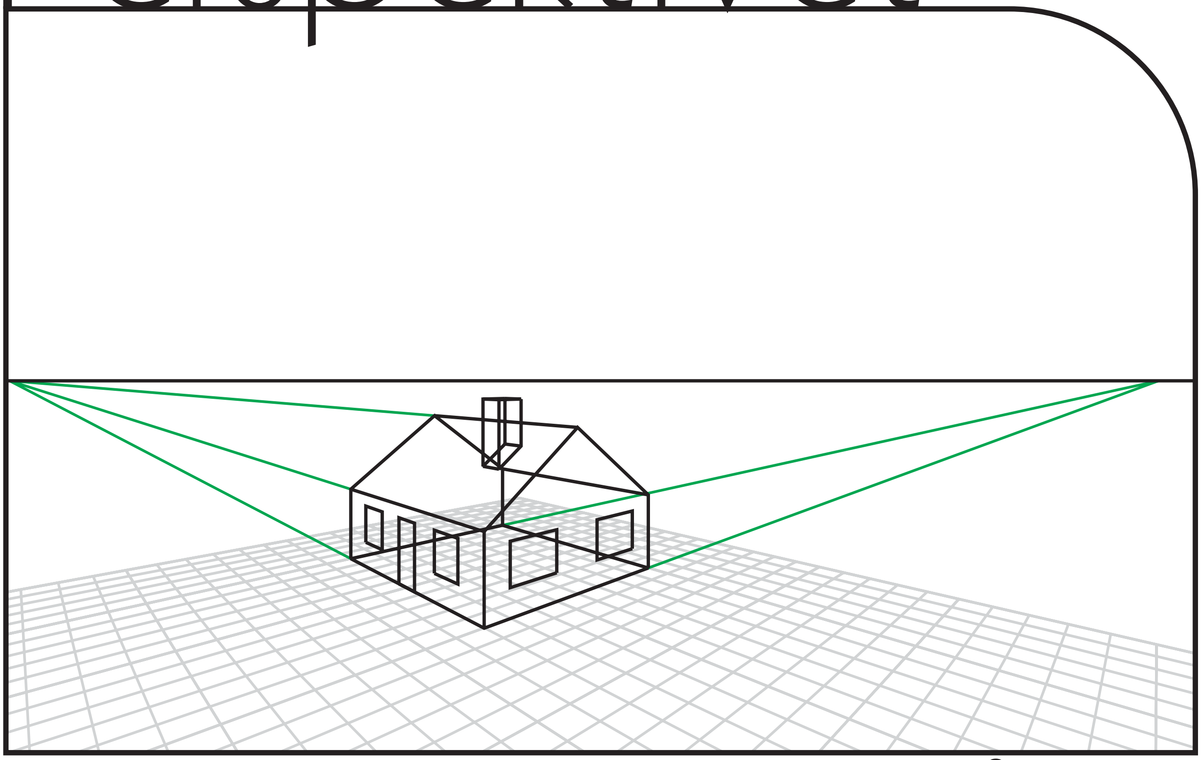
Perspektivet



Indholdsfortegnelse

1. Indledning

Denne note er skrevet med den hensigt at skulle udgøre hovedmaterialet i et projekt i matematik på obligatorisk niveau i emnet *perspektivregning*. Noten vil ikke i ret stort omfang komme ind på den historiske udvikling af teorien for linearperspektivet, selv om dette kan være aldeles interessant og relevant. Den interesserede læser må så finde materiale herom andetsteds. I stedet vil noten koncentrere sig om at definere de forskellige begreber matematisk forsvarligt, at udlede egenskaber for linearperspektivet og sætte eleverne i stand til at tegne simple figurer i perspektiv. Med Windows programmet *Perspective Modeler* kan eleverne eksperimentere med perspektivet. Dermed kan perspektivets egenskaber og regler udforskes uden at man behøver udføre alle tegningerne selv. Omtalte program kan downloades fra min hjemmeside på følgende sted:

www.matematiksider.dk/perspektiv_down.html

Selvom materialet er tiltænkt matematik på obligatorisk niveau har jeg været nødt til at introducere emner såsom vektorer og linjer i rummet, for at kunne bevise de forskellige sætninger. Rumgeometrien er dog minimeret til det absolut nødvendige og burde ikke udgøre nogen hindring for eleverne. (Opdateret 03.06.05).

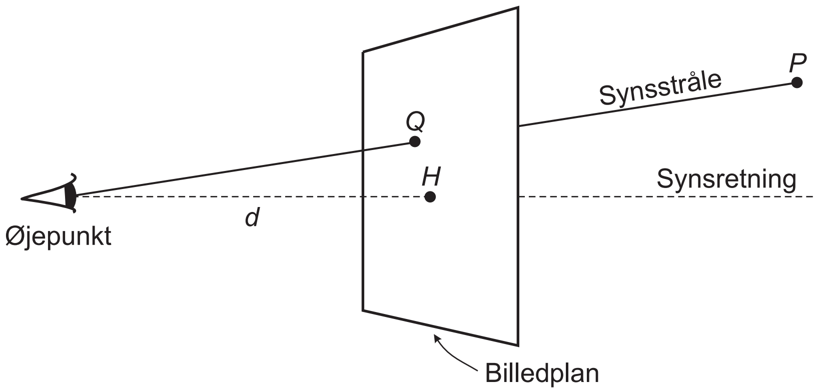
2. Centralprojektionsmodellen

Metoder til at afbilde den tredimensionelle verden på en todimensional flade har optaget mennesket lige siden tidernes morgen. I Lascaux-grotten i Sydfrankrig har man fundet hulemalerier, som er ca. 18000 år gamle – billeder af kæmpetyre, heste og hjorte, afbildet på klipperne. Siden har ægypterne, grækerne og romerne på hver deres måde afbildet tredimensionelle figurer på vægge, vaser etc. Man skal dog helt frem til den italienske renæssance før man har det første kendte billede, hvor afbildningen er foretaget perspektivisk korrekt. Det skal dog ikke forlede én til at tro, at datidens folk var primitive – mange af datidens værker var stor kunst, men afbildningerne var altså ikke ”naturtro”. Det første kendte billede, som er perspektivisk korrekt, skyldes *Filippo Brunellischi* (1377-1446). En anden italiener, *Leone Battista Alberti* (1404-1472), var derimod den første til at udgive en bog om maleriets teori, ”Della Pittura”. Renæssancen i Italien var netop karakteriseret ved at kunsten havde helt enestående betingelser. I starten var det at udføre malerier, skulpturer og bygge kirker blevet betragtet som simpelt håndværk, men efterhånden vandt de bedste udøvere berømmelse og blev anerkendte som store kunstnere. Vi behøver bare nævne sublime udøvere som *Leonardo da Vinci* (1452-1519), *Raphaello Santi* eller bare *Raphael* (1483-1520) og *Michelangelo Buonarroti* (1475-1564). Paver og fyrster bestilte kunstværker hos de bedste udøvere for at lade sig udødeliggøre ....

Med introduktionen af *centralprojektionsmodellen* fik man endelig en metode til at afbilde en 3D figur, som vi ser den. Denne model vil blive beskrevet i det følgende.

Lad os sige, at vi ønsker at afbilde en 3D-figur i en plan, kaldet *billedplanen*. Ethvert *objektpunkt P* fra 3D-figuren afbildes i et *billedpunkt Q*, som er skæringspunktet mellem billedplanen og *synsstrålen*. Med sidstnævnte menes linjen gennem *P* og *øjepunktet*. En sådan afbildning kaldes for en *centralprojektion*.

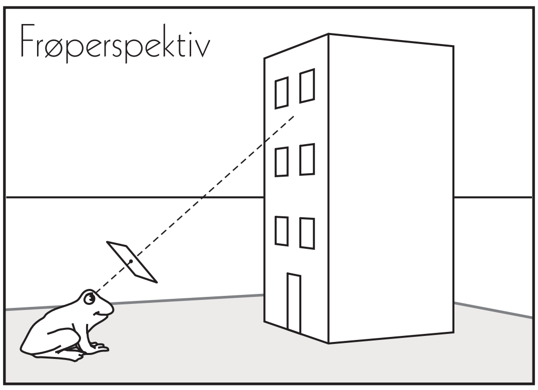
Figur 1

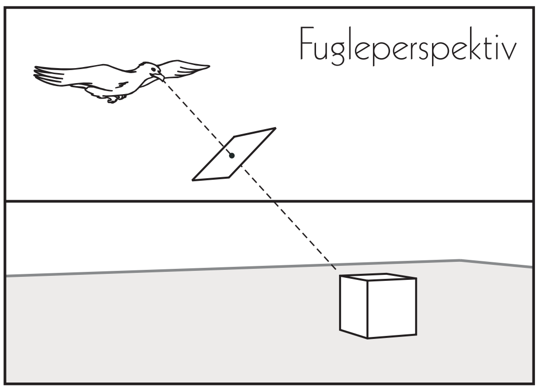


Situationen er illustreret på figur 1. Filosofien bag centralprojektionsmodellen er den simple, at personen ikke kan se forskel på selve objektpunktet og billedpunktet, da vi kan antage, at lys bevæger sig ad rette linjer. Tænk for eksempel på, at billedplanen kan være af glas – så vil 3D-figuren og dens billede se ud til at ligge oveni hinanden!

På figur 1 er også tegnet en linje kaldet *synsretningen*, som skal forestille at stå vinkelret på billedplanen og gå igennem øjepunktet. Det er en ren teknisk betegnelse idet øjet jo ikke bare kan se punkter i en specifik retning, men modtager lys indenfor hele øjets synsfelt. Vi vil vende tilbage til denne problematik i afsnit 9. Synsretningens skæring med billedplanen kaldes *hovedpunktet* og betegnes med *H*. Alternativt kan hovedpunktet beskrives som øjepunktets vinkelrette projektion på billedplanen. Afstanden fra øjepunktet til hovedpunktet vil vi kalde for *distancen* og betegne med *d*.

Figur 2 og 3

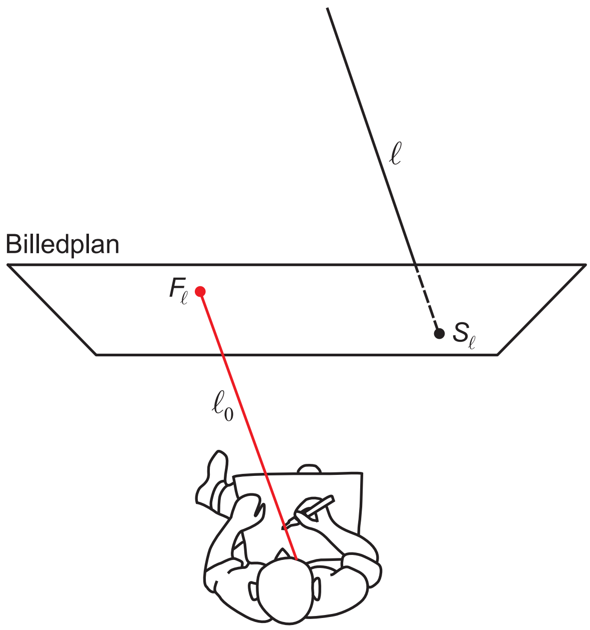




Men hvordan skal billedplanen da placeres i forhold til øjepunktet? Ja, det er i princippet helt vilkårligt, så længde billedplanen ikke indeholder øjepunktet! Figur 2 viser et tilfælde, hvor billedplanen er vippet opad, svarende til at synsretningen forløber opad (*frøperspektiv*), mens figur 3 viser et tilfælde, hvor billedplanen er vippet nedad, svarende til en nedadgående synsretning (*fugleperspektiv*). Man kan endda tænke sig billedplanen drejet i sin eget plan omkring synsretningsaksen, hvilket man kan sige svarer til at observatøren hælder hovedet til siden – som en pilot, der vipper den ene vinge ned for at flyve i en kurve.

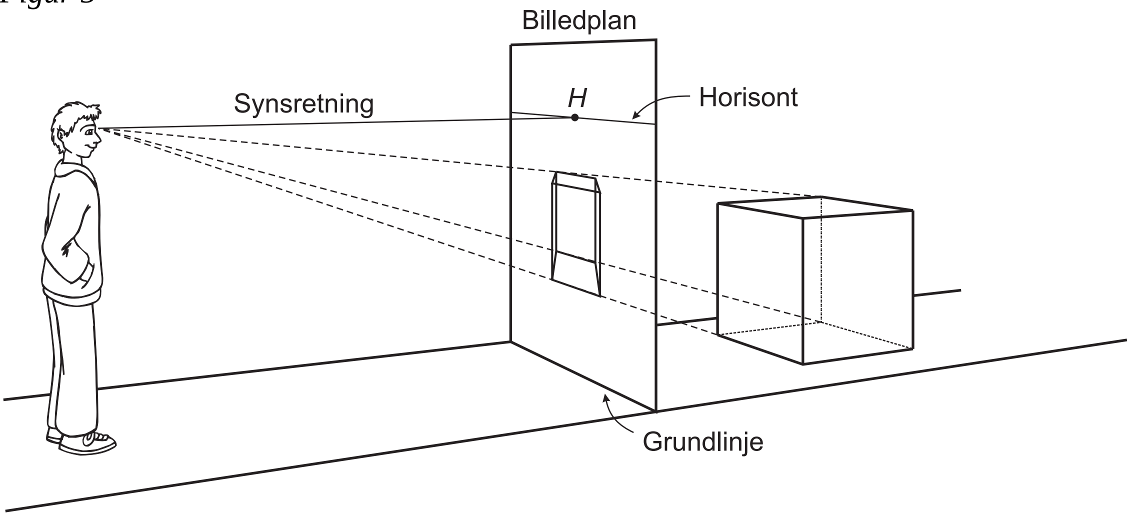
Figur 4 forestiller en betragter, en billedplan og en linje ℓ. En linje, som er parallel med billedplanen, vil vi kalde for en *frontlinje*. Alle andre linjer vil vi betegne *dybdelinjer*, fordi de bevæger sig ind i dybden. Linjen ℓ er et eksempel på en sådan. Til enhver dybdelinje vil vi knytte to punkter, nemlig linjens *spor* S_ℓ og linjens *forsvindingspunkt* F_ℓ. Førstnævnte er linjens skæring med billedplanen, mens sidstnævnte fås som skæringspunktet mellem billedplanen og den linje ℓ_0, som er parallel med ℓ, og som går igennem øjepunktet. Hvis vi har at gøre med et dybdelinjestykke, dvs. en del af en dybdelinje, så vil vi også tale om, at det har et spor og et forsvindingspunkt, nemlig sporet og forsvindingspunktet for forlængelsen af ℓ.

Figur 4



Selv om billedplanen som nævnt kan anbringes på mange måder, så skal vi hovedsagligt beskæftige os med det specialtilfælde, hvor billedplanen er anbragt *lodret*, hvormed synsretningen altså bliver *vandret*. En af årsagerne er, at i dette specialtilfælde bliver det nemmere at formulere perspektivets regler og bevise dem. En anden er, at de fleste kunstværker også er udført i et perspektiv med lodret billedplan. Figur 5 på næste side viser en person betragte en terning. Perspektivet er med lodret billedplan. Bemærk, at der i billedplanen er afbildet en *vandret* linje gennem hovedpunktet, kaldet *horisonten*. Man kan vise, at horisonten er *forsvindingslinje* for enhver vandret plan! Det perspektiviske billede af et punkt, som bevæger sig i en vandret plan og ind i dybden, vil nærme sig til et punkt på horisonten.

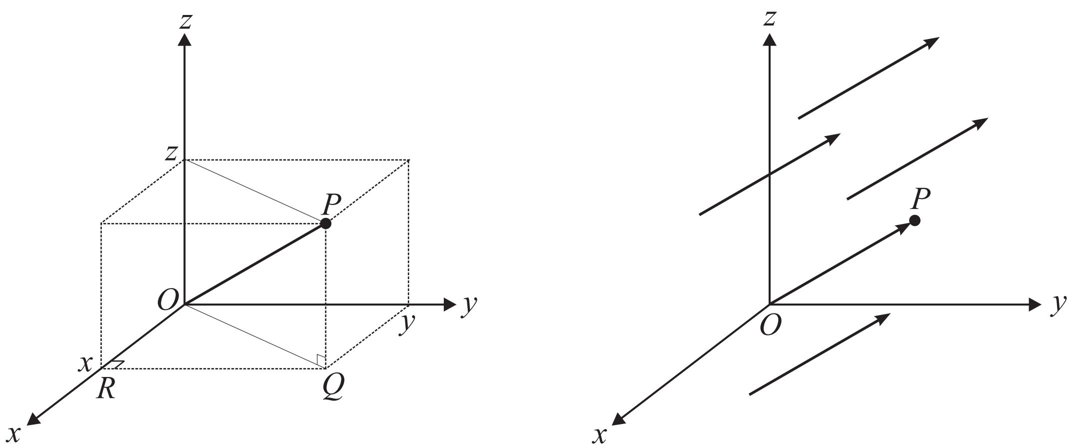
Figur 5



3. Kort om rumgeometri

For at kunne foretage beviser for kommende sætninger vedrørende perspektivet er det hensigtsmæssigt at indføre nogle få centrale begreber fra rumgeometrien. Vi skal indføre vektorbegrebet og definere hvad en parameterfremstilling for en linje i rummet er. Som koordinatsystem i rummet benyttes det, som består af tre akser anbragt vinkelret på hinanden, som vist på figur 6. Akserne orienteres som et *højresystem*, der er karakteriseret ved, at hvis man befinder sig et sted på den positive del af z-aksen og kigger ind mod origo O, så skal den drejning, som sender x-aksen over i y-aksen, foregå *mod* uret. Hvis man vender z-aksen på figur 6 nedad, så fås et såkaldt *venstresystem*. Vi vil kun arbejde med højresystemer!

Figur 6 og 7



Et punkt P i rummet siges at have koordinaterne (x, y, z), hvis punktets vinkelrette projektion ind på hver af akserne er henholdsvis x, y, og z. Situationen er vist på figur 6, hvor en illustrativ rektangulær kasse er tegnet med diagonal OP. Samtidigt viser figuren, at hvis vi anvender Pythagoras' læresætning på ΔORQ og ΔOQP, fås henholdsvis

$x^2 + y^2 = |OQ|^2$ og $|OQ|^2 + z^2 = |OP|^2$, hvilket tilsammen betyder, at man har følgende udtryk for længden af linjestykket *OP*:

(1) $$|OP| \;=\; \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

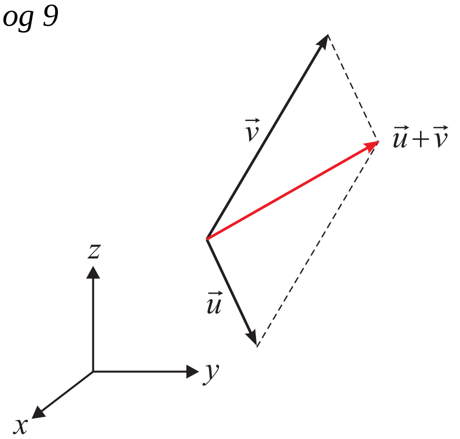
Når man parallelforskyder en pil i rummet fås en ny pil med samme længde og retning. Samlingen af alle pile med en bestemt retning og længde vil vi betegne som én *vektor*. Hver pil er blot en *repræsentant* for vektoren. På figur 7 er tegnet en række repræsentanter for den samme vektor.

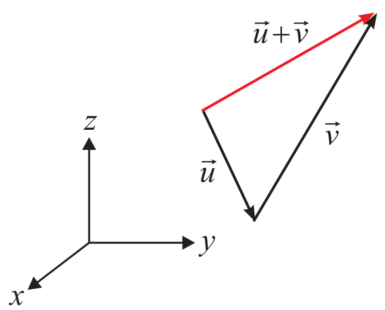
Som betegnelse for en vektor benyttes ofte et bogstav med en pil over, såsom $\vec{v}$. Som repræsentant for vektoren $\vec{v}$ kan man vælge den pil, som har begyndelsespunkt i origo. Hvis denne repræsentants endepunkt kaldes *P* kan man skrive $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$ og vektoren $\vec{v}$ siges at være *stedvektor* for punktet *P*. Koordinaterne til en vektor $\vec{v}$ defineres som koordinaterne til endepunktet *P* for den repræsentant, som har begyndelsespunkt i origo. På figur 6 har vektoren $\overrightarrow{OP}$ derfor koordinater (x, y, z). Den vektor, som har koordinaterne $(0,0,0)$, betegnes *nulvektoren*. *Længden* af en vektor $\vec{v}$ betegnes med $|\vec{v}|$ og defineres som længden af en af dens repræsentanter. Ifølge ovenstående samt (1) fås derfor: $|\vec{v}| \;=\; |\overrightarrow{OP}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. En vektor med længden 1 kaldes for en *enhedsvektor*.

En af grundene til, at vi indfører vektorer er naturligvis, at vi ønsker at regne med dem. Vi skal definere, hvad det vil sige at addere to vektorer samt at gange en vektor med et tal. Lad $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ og $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ være to vektorer og *t* et tal. Da defineres vektorerne $\vec{u} + \vec{v}$ og $t \cdot \vec{u}$ som vektorerne med følgende koordinater, idet koordinaterne nu alternativt skrives lodret:

(2) $$\vec{u} + \vec{v} \;=\; \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix} ; \quad t \cdot \vec{u} \;=\; \begin{pmatrix} t \cdot x_1 \\ t \cdot y_1 \\ t \cdot z_1 \end{pmatrix}$$

Figur 8 og 9

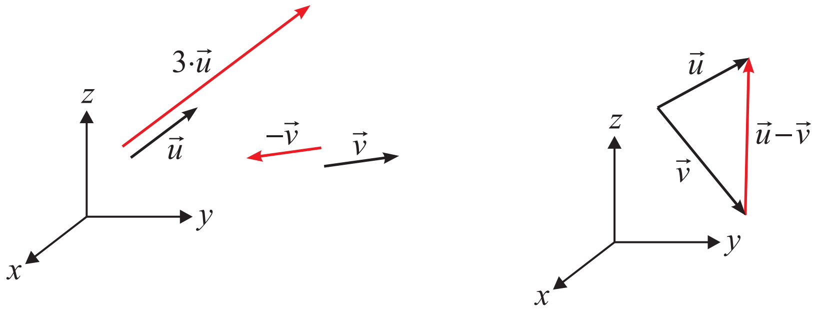




Det overlades til læseren at overbevise sig om, at summen af to vektorer kan fås ved at anvende *parallelogramreglen*: Vælg to repræsentanter, som har samme begyndelsespunkt og tegn det plane parallelogram, som de to vektorer udspænder. Så er diagonalen en repræsentant for summen af de to vektorer, som vist på figur 8. En alternativ metode er at vælge repræsentanter for $\vec{u}$ og $\vec{v}$, så begyndelsespunktet for sidstnævnte er lig med slutpunktet for førstnævnte. Så er den pil, som har begyndelsespunkt fælles med $\vec{u}$'s repræsentant og slutpunkt fælles med $\vec{v}$'s repræsentant, en repræsentant for vektoren $\vec{u}+\vec{v}$, som illustreret på figur 9.

Vektoren $t\cdot\vec{u}$ har længden $|t|\cdot|\vec{u}|$, og har samme retning som $\vec{u}$, hvis t er positiv og modsat retning af $\vec{u}$, hvis t er negativ. Dette har jeg illustreret på figur 10, hvor $\vec{u}$ er multipliceret med 3 og $\vec{v}$ er multipliceret med –1. Bemærk, at jeg har tegnet repræsentanter, som er lidt forskudt i forhold til hinanden, så man tydeligt kan se begyndelsespunktet for alle vektorerne! Man kan også trække to vektorer fra hinanden: $\vec{u}-\vec{v}$ defineres da ved, at det skal være vektoren $\vec{u}+(-\vec{v})$. Så koordinaterne til differensen $\vec{u}-\vec{v}$ fås ved at subtrahere koordinaterne parvis. Rent geometrisk kan man få en repræsentant for $\vec{u}-\vec{v}$ på følgende måde: Vælg to repræsentanter for $\vec{u}$ og $\vec{v}$, som har samme begyndelsespunkt. Da er den pil, som går fra endepunktet af $\vec{u}$'s repræsentant til endepunktet af $\vec{v}$'s repræsentant en repræsentant for $\vec{u}-\vec{v}$, som illustreret på figur 11.

Figur 10 og 11



Eksempel 1

Bestem koordinaterne til vektoren $2\cdot\vec{u}-5\cdot\vec{v}$, hvor $\vec{u}=(2,-1,4)$ og $\vec{v}=(-1,3,7)$. I øvrigt betegnes $2\cdot\vec{u}-5\cdot\vec{v}$ en *linearkombination* af $\vec{u}$ og $\vec{v}$.

Løsning:

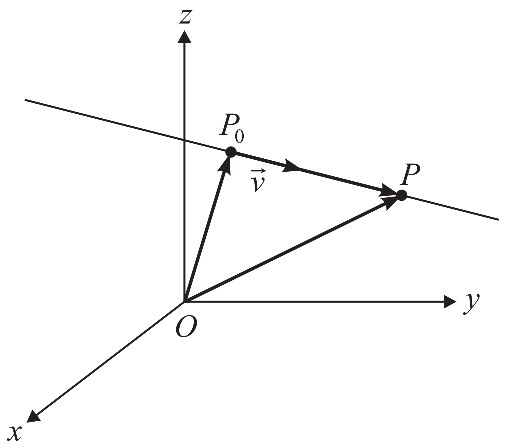
$$2\cdot\vec{u}-5\cdot\vec{v} \;=\; 2\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\-4\end{pmatrix} - 5\cdot\begin{pmatrix}-1\\3\\7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\cdot2-5\cdot(-1)\\2\cdot1-5\cdot3\\2\cdot(-4)-5\cdot7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9\\-13\\-43\end{pmatrix}$$

□

Med ovenstående definitioner er vi nu klar til at indføre *parameterfremstillingen for en ret linje i rummet*. Et punkt $P(x,y,z)$ på linjen kan beskrives ved dets stedvektor $\overrightarrow{OP}$, som kan splittes op i en sum af stedvektoren til et fast punkt $P_0(x_0,y_0,z_0)$ på linjen og en vektor $\overrightarrow{P_0P} = t \cdot \vec{v}$, som er proportional med en *retningsvektor* $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ for linjen (se figur 12). Når t (*parameteren*) gennemløber alle reelle tal, vil alle punkter på linjen fremkomme.

(3) $$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + t \cdot \vec{v} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

Figur 12



Eksempel 2

a) Bestem en parameterfremstilling for linjen ℓ, der går igennem følgende to punkter: $P_1(0;2;2,5)$ og $P_2(1;6;3)$.

b) Bestem skæringspunktet mellem linjen ℓ og den lodrette plan med ligning $y = 4$. Til venstre på figur 12 ses planen i en lodret projektion i *xy*-planen.

Løsning: a) Som fast punkt på linjen vælger vi P_1. Som retningsvektor kan vi vælge

$$\vec{v} = \overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0,5 \end{pmatrix}$$

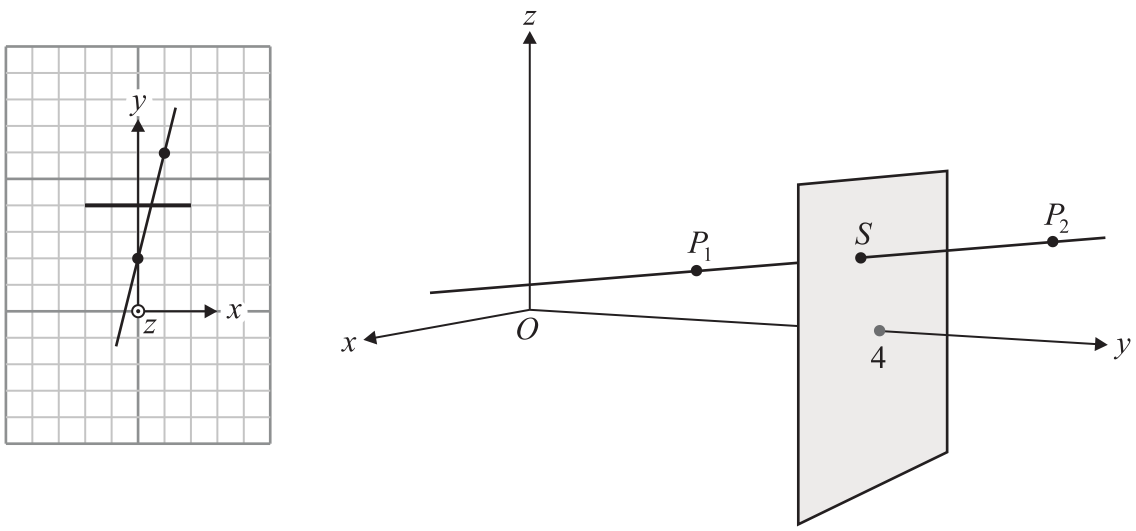
En mulig parameterfremstilling for linjen er derfor

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_1} + t \cdot \overrightarrow{P_1P_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2,5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 2+4t \\ 2,5+0,5t \end{pmatrix}$$

b) Når t gennemløber de reelle tal, gennemløbes linjens punkter. Derfor gælder det om at finde den værdi for t, som giver y-værdien 4: $y = 4 \;\Leftrightarrow\; 2+4t = 4 \;\Leftrightarrow\; t = 0,5$. Indsættes denne værdi i linjens ligning fås stedvektoren til skæringspunktet S:

$$\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2,5 \end{pmatrix} + 0,5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 4 \\ 2,75 \end{pmatrix}$$

Figur 13



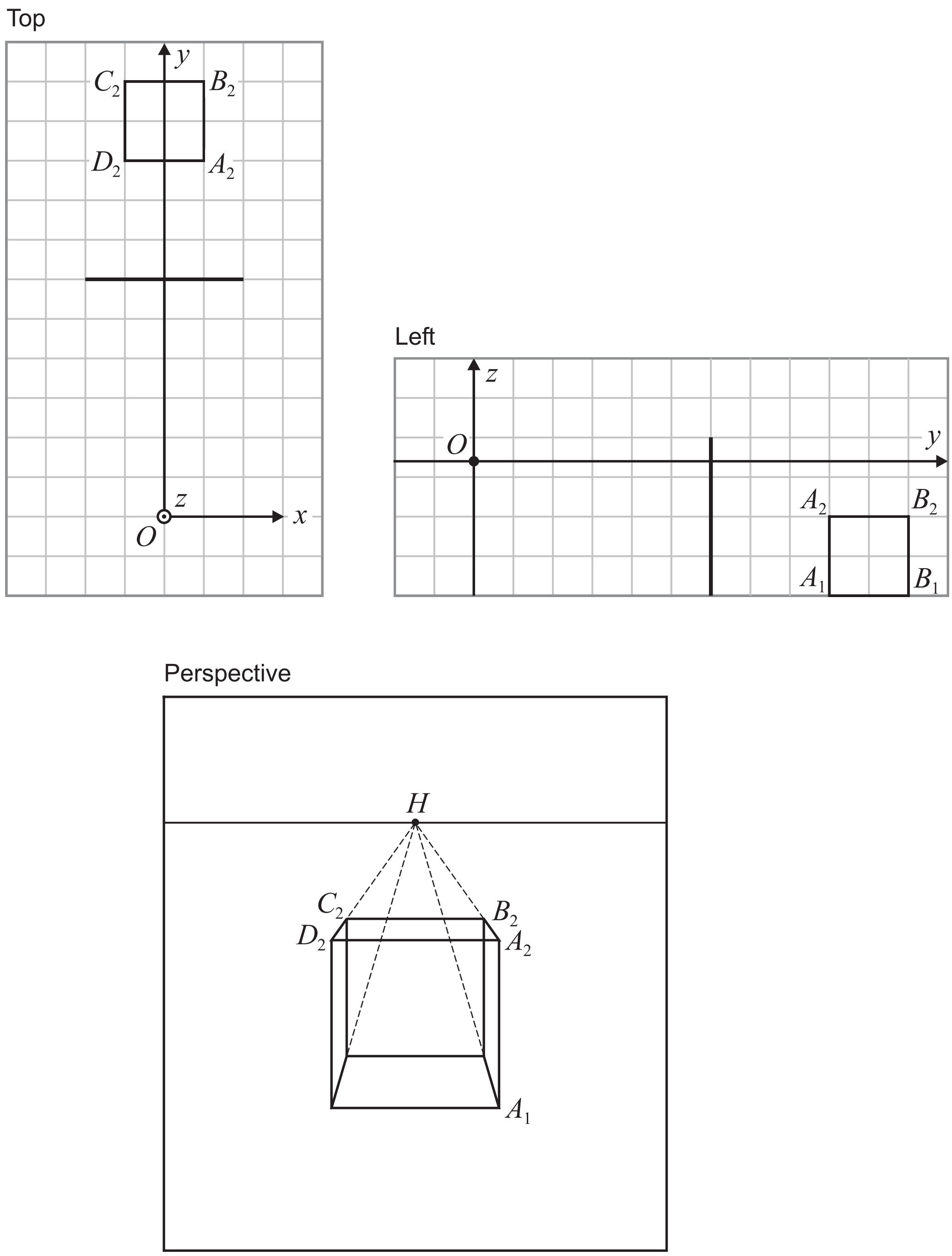
I denne note vil vi kun beskæftige os med planer, som er lodrette og parallelle med *xz*-planen. I afsnit 5 skal vi anvende rumgeometrien til at udlede en formel for billedpunktets koordinater.

4. Rummet og den perspektiviske plan

For at undgå at rode rundt i begreberne er det uhyre vigtigt, at man skelner mellem, hvordan genstanden i virkeligheden ser ud i rummet (3D), og hvordan dens perspektiviske billede i den perspektiviske plan ser ud. Man kan beskrive en genstand i 3D på forskellig måde. Én måde er at angive en *plantegning* og en eller flere *opstalttegninger*. Med en plantegning menes genstanden projiceret vinkelret ned i en vandret plan. Man kan eventuelt samtidigt indtegne billedplanen, øjepunktet *O*, samt koordinatakser på plantegningen. Situationen fra figur 5, hvor en observatør betragter en terning, er beskrevet på figur 14. Plantegningen kaldes her for *Top*, der er betegnelsen anvendt i programmet *Perspective Modeler*, som vi skal benytte senere. Da billedplanen er lodret, vil billedplanen i projektionen Top fremstå som et linjestykke. En opstalttegning er genstanden projiceret ind i en lodret plan. På figur 14 bliver opstalttegningen betegnet *Left*.

Bemærk, at der er lagt et koordinatsystem ind, som har begyndelsespunkt i øjepunktet, og *x*-aksen er anbragt vandret og parallel med billedplanen, *y*-aksen vinkelret derpå og *z*-aksen lodret. Dette valg af koordinatsystem skal vi anvende i næste afsnit, så den perspektiviske afbildning får et simpelt udseende. Når vi skal til at bruge programmet *Perspective Modeler* er valget af koordinatsystem derimod helt vilkårligt, og her vil det måske være mere hensigtsmæssigt at lægge koordinatsystemet anderledes, for eksempel så punkter i grundplanen, hvorpå terningen står, får *z*-koordinat 0. Et punkts rumlige koordinater kan aflæses udfra plantegningen og opstalttegningen. Idet hvert tern repræsenterer 0,5 meter og øjepunktet befinder sig 1,70 meter over grundplanen, kan vi for eksempel finde koordinaterne til punktet A_2. Plantegningen giver $x = 0,5$ og $y = 4,5$, mens opstalttegningen giver $y = 4,5$ og $z = -0,7$. De rumlige koordinater for punktet A_2 er dermed $(0,5; 4,5; -0,7)$. Den sidste tegning i figur 14 kaldet *Perspective* er det perspektiviske billede. I næste afsnit skal vi se, hvordan man kan beregne de perspektiviske koordinater i billedplanen.

Figur 14



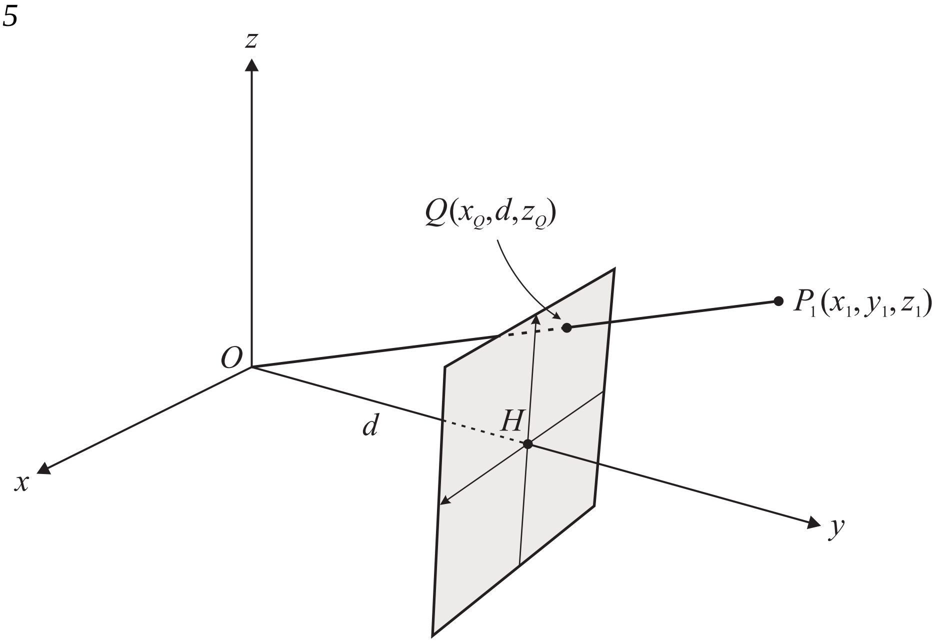
5. Den perspektiviske afbildning

I det følgende vil vi igen antage, at billedplanen er lodret, samt at man lægger et koordinatsystem ind i rummet på følgende måde:

i) Koordinatsystemets begyndelsespunkt anbringes i øjepunktet.
ii) z-aksen skal pege lodret opad.
iii) y-aksen er vandret og anbringes så den peger i synsretningens retning.
iv) x-aksen anbringes vinkelret på de to andre akser, så der dannes et højresystem.

Afstanden fra øjepunktet O til billedplanen er lig med d (distancen), så billedplanen har ligningen $y = d$. Situationen kan ses på figur 15. Punktet P_1 er et objektpunkt og linjen gennem O og $P_1(x_1, y_1, z_1)$ en synsstråle. Synsstrålens skæring med billedplanen er billedpunktet Q. Da dette punkt ligger i billedplanen med ligning $y = d$ må anden koordinaten være lig med d. Billedpunktets koordinater er derfor på formen (x_Q, d, z_Q). Ved at droppe anden koordinaten får vi (x_Q, z_Q), som vi vil kalde for billedpunktets koordinater i billedplanen. Billedplanens koordinatsystem er indtegnet på figur 15. Bemærk, at dette koordinatsystem har begyndelsespunkt i det, der svarer til hovedpunktet H.

Figur 15



Sætning 3

En lodret billedplan er anbragt i afstanden d fra øjepunktet. Med ovenstående valg af koordinatsystem i rummet afbildes $P_1(x_1, y_1, z_1)$ i billedpunktet med koordinater:

$$(x_Q, z_Q) = (d \cdot x_1 / y_1 ,\ d \cdot z_1 / y_1)$$

Bevis: Vi skal have fundet synsstrålens skæringspunkt med billedplanen. Som fast punkt på synsstrålen kan vi bruge $O(0,0,0)$ og $\vec{v} = \overrightarrow{OP_1} = (x_1, y_1, z_1)$ kan benyttes som retningsvektor. Ifølge (3) giver det anledning til følgende parameterfremstilling for synsstrålen:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \cdot x_1 \\ t \cdot y_1 \\ t \cdot z_1 \end{pmatrix}$$

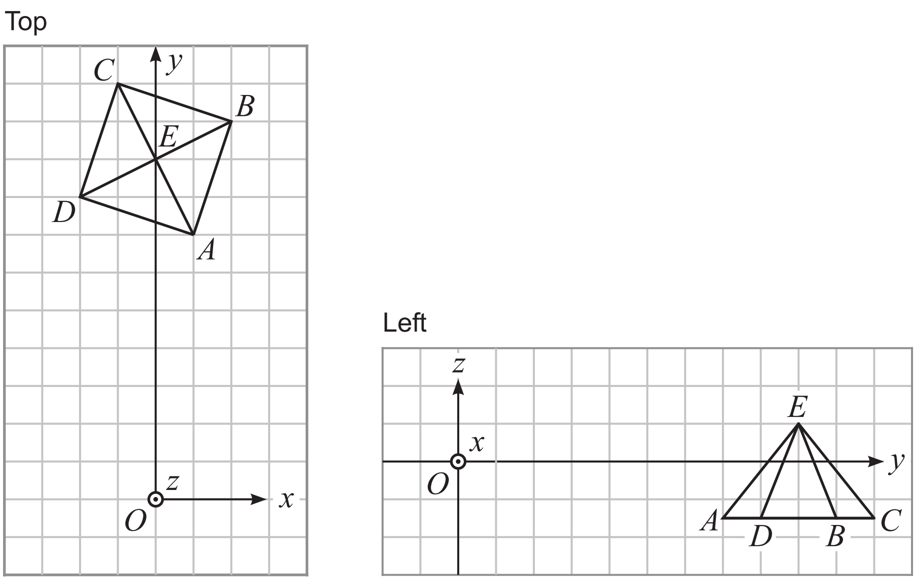
For at finde skæringspunktet med billedplanen finder vi først den parameterværdi for t, der betyder at 2. koordinaten bliver lig med d: $y = d \;\Leftrightarrow\; t \cdot y_1 = d \;\Leftrightarrow\; t = d/y_1$. Indsættes denne parameterværdi i parameterfremstillingen fås:

$$\overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} d/y_1 \cdot x_1 \\ d \\ d/y_1 \cdot z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \cdot x_1/y_1 \\ d \\ d \cdot z_1/y_1 \end{pmatrix}$$

hvormed $(x_Q, z_Q) = (d \cdot x_1/y_1 ,\ d \cdot z_1/y_1)$ som påstået.

□

Figur 16



Eksempel 4

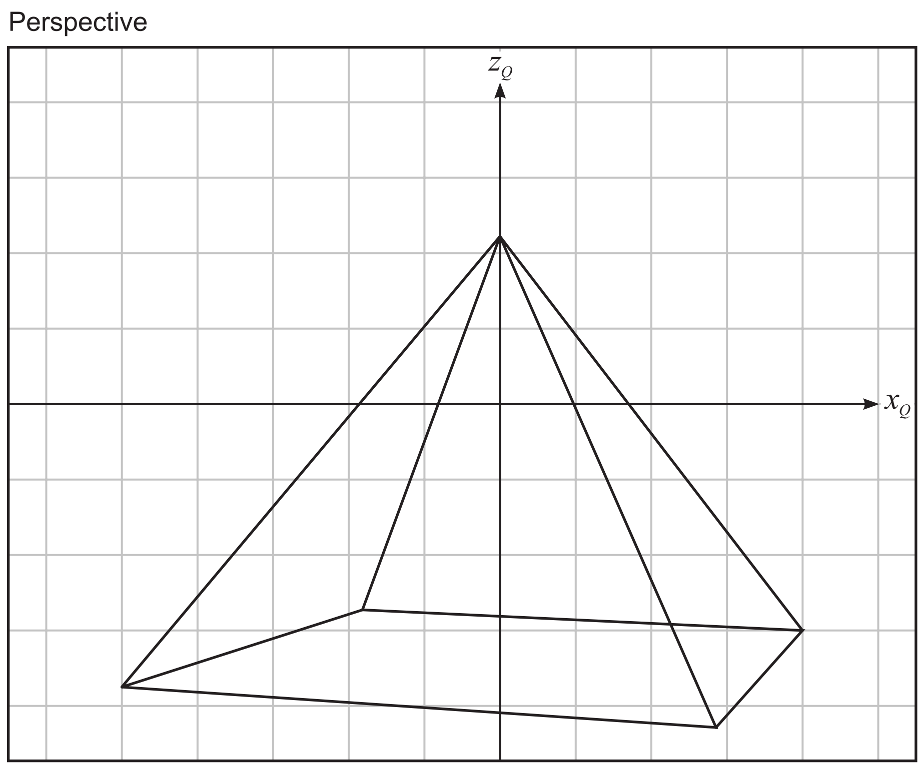
På figur 16 er afbildet plantegning og opstalttegning for en pyramide i rummet. Den betragtes fra øjepunktet O, som er anbragt i origo, og synsretningen er identisk med y-aksen. Betingelserne for at bruge sætning 3 er dermed opfyldt. Billedplanen er ikke anført på figuren, men det oplyses, at distancen i billedet er 20 cm.

Det er kun nødvendigt at bestemme billedpunkterne for pyramidens hjørner, og så forbinde disse billedpunkter med rette linjestykker for at få hele det perspektiviske billede. I næste afsnit skal vi nemlig vise, at et ret linjestykke afbildes i et ret linjestykke (eller punkt)! Det er hensigtsmæssigt at lave en tabel, hvori man anfører de rumlige koordinater for de fem hjørner *A*, *B*, *C*, *D* og *E*. Disse koordinater kan fås udfra figur 16, idet det oplyses, at gitteret har masker på 1 gange 1 meter. I skemaets sidste to rækker anbringes billedpunkterne, som er beregnet via formlerne i sætning 3. Alle mål i tabellen er i cm.

	x_1	y_1	z_1	$x_Q = d \cdot x_1 / y_1$	$z_Q = d \cdot z_1 / y_1$
A	100	700	–150	2,86	–4,29
B	200	1000	–150	4,00	–3,00
C	–100	1100	–150	–1,82	–2,73
D	–200	800	–150	–5,00	–3,75
E	0	900	100	0	2,22

Herefter konstrueres et koordinatsystem for billedplanen. Det er gjort nedenfor, hvor hvert tern svarer til 1 cm. Billedpunkterne kan herefter indtegnes og forbindes med rette linjer, så billedet af pyramiden fremkommer. Origo svarer til hovedpunktet *H* og x_Q-aksen er identisk med horisonten.

Figur 17



6. Perspektivets egenskaber ved lodret billedplan

For at holde matematikken på et rimeligt niveau vil vi nøjes med at bevise sætninger, som vedrører perspektiv foretaget med *lodret* billedplan, hvilket er det samme som at sige, at synsretningen er vandret. Første sætning vil handle om frontlinjer, den næste om dybdelinjer, jævnfør definitionerne fra afsnit 2.

Sætning 5 (Om frontlinjer m.m.)

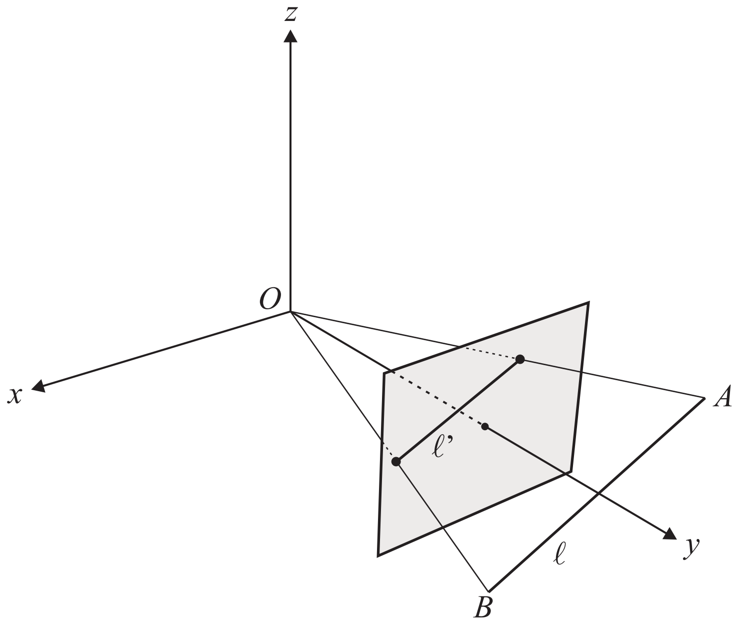
For den perspektiviske afbildning på lodret billedplan gælder følgende:

a) Et frontlinjestykke afbildes i et linjestykke.
b) Et lodret linjestykke afbildes i et lodret linjestykke.
c) Et vandret frontlinjestykke afbildes i et vandret linjestykke.
d) Et objekt, som befinder sig i en plan parallel med billedplanen, afbildes i et objekt, som er *ligedannet* med det originale objekt. Alle afstande og vinkler er dermed bevaret ved den perspektiviske afbildning.

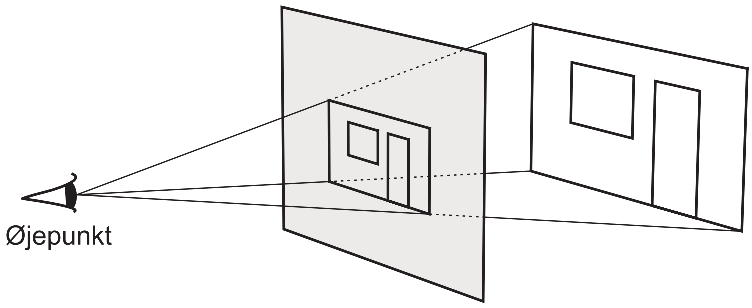
Det bør nævnes, at a) og d) også gælder selv om billedplanen ikke er lodret. Før vi beviser sætningen, vil vi illustrere nogle af udsagnene i sætningen. Betragt figur 14 fra afsnit 4. Linjestykket A_1A_2 er i virkeligheden lodret, og som vi ser, afbildes linjestykket også lodret i billedplanen (*Perspective*). Linjestykket A_2D_2 er en af de forreste vandrette kanter på terningen. Det er vandret og parallel med billedplanen. Linjestykket er altså et vandret frontlinjestykke og skal afbildes vandret i den perspektiviske plan. Dette konstateres også i feltet *Perspective*. Den forreste lodrette side i terningen opfylder betingelsen i d) og skal derfor afbildes som et kvadrat i billedplanen.

Bevis for sætning 5: Vi antager, at det rumlige koordinatsystem er indlagt som i afsnit 5, så vi kan bruge sætning 3. a) Betragt figur 18: Endepunkterne af linjen ℓ betegnes *A* og *B*. Billedet af ℓ fås da som skæringen mellem den plane trekant *ABO* og billedplanen, hvilket giver et linjestykke ℓ'. Dog må vi forudsætte, at linjen ℓ ikke befinder sig i *xz*-planen, i hvilket tilfælde linjen ikke har noget billede (Overvej!). b) De rumlige koordinater for punkterne på en lodret linje vil alle have samme *x*- og *y*-koordinat. Af sætning 3 fås derfor, at alle linjens billedpunkter vil have den samme x_Q-koordinat, da $x_Q = d \cdot x_1/y_1$. Med andre ord: Billedet af linjen vil være lodret. c) Alle punkter på en vandret frontlinje vil have samme *y*- og *z*- koordinat. Da $z_Q = d \cdot z_1/y_1$ vil alle punkter på billedet derfor have samme z_Q-koordinat, hvilket betyder, at billedet af linjen er vandret. d) Situationen er illustreret med eksemplet på figur 19, som viser at billedet af en husfacade er en formindsket udgave af den originale husfacade. Påstanden i d) kan også forklares via billedpunktets koordinater: Alle punkter (x_1, y_1, z_1) i objektet har samme 2. koordinat y_1. Det betyder, at vi i udtrykket for billedpunkterne kan sætte y_1 udenfor som en konstant: $(x_Q, z_Q) = (d \cdot x_1/y_1, d \cdot z_1/y_1) = d/y_1 \cdot (x_1, z_1)$. Så ethvert objektpunkt beskrevet ved x_1 og z_1 i den lodrette plan $y = y_1$ afbildes i billedplanen i et punkt med koordinater, som er et fast tal d/y_1 gange (x_1, z_1). Dette viser det ønskede.

Figur 18



Figur 19



□

Sætning 6 (Om dybdelinjer)

For den perspektiviske afbildning på lodret billedplan gælder følgende:

a) En dybdelinje, som passerer igennem øjepunktet, afbildes i et punkt, som er identisk med linjens spor og forsvindingspunkt.

b) En dybdelinje, som ikke passerer igennem øjepunktet, afbildes i den linje, som går gennem forsvindingspunktet F_ℓ og sporet S_ℓ. Selve forsvindingspunktet kan dog ikke forekomme som billedpunkt! Når man bevæger sig på linjen ind i dybden, vil billedpunktet nærme sig til linjens forsvindingspunkt.

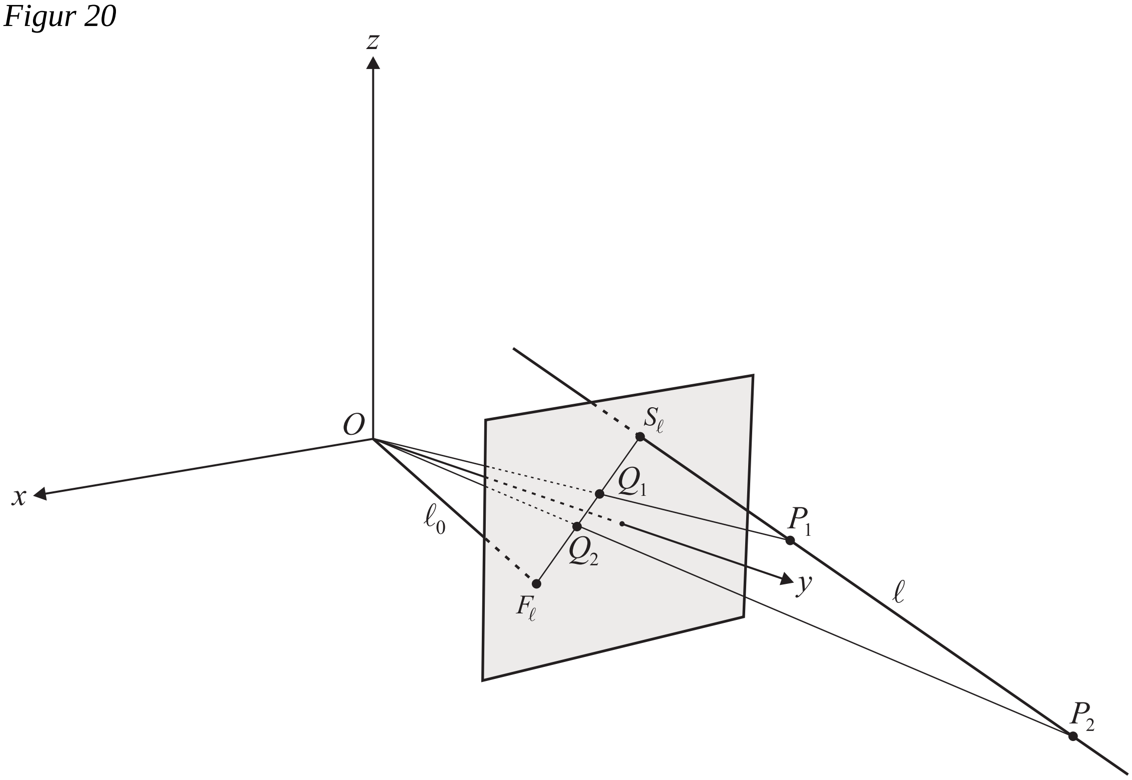
c) Parallelle dybdelinjer har samme forsvindingspunkt.

d) En vandret dybdelinje, som danner vinklen v med synsretningen, har et forsvindingspunkt, som ligger på horisonten stykket $d \cdot \tan(v)$ fra hovedpunktet H. Til højre for H, hvis dybdelinjen bevæger sig mod højre på vej ind i dybden, og til venstre for H, hvis det modsatte er tilfældet.

Det bør nævnes, at a), b) og c) også gælder selv om billedplanen ikke er lodret. Før vi beviser sætningen, vil vi illustrere nogle af udsagnene i sætningen. Betragt figur 14 fra afsnit 4. Lad os se på linjestykket A_2B_2. Det er åbenlyst parallel med synsretningen og ifølge definitionen af forsvindingspunkt i afsnit 2, har det derfor et forsvindingspunkt, som findes på følgende måde (se figur 4): Man ser på den linje ℓ_0, som går igennem øjepunktet og er parallel med linjestykket A_2B_2. ℓ_0 bliver i dette tilfælde identisk med synsretningen. Denne linjes skæringspunkt med billedplanen er forsvindingspunktet, og det bliver derfor i dette tilfælde lig med hovedpunktet *H*. Vi ser da også i feltet *Perspective*, at linjestykket skal afbildes, så det nærmer sig til hovedpunktet. Hovedpunktet er også forsvindingspunkt for andre kanter i terningen, for eksempel C_2D_2, som jo er parallel med kanten A_2B_2. Vi er nu klar til at bevise sætningen.

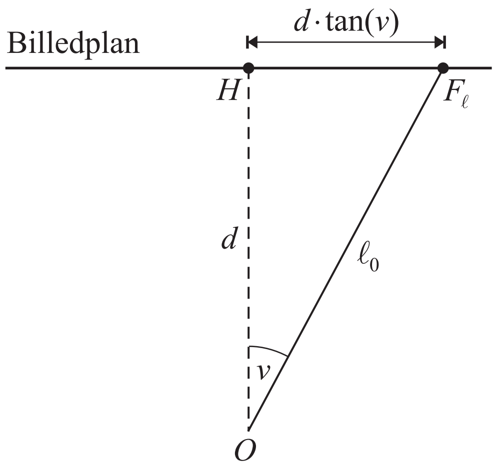
Bevis for sætning 6: a) Følger direkte af, at linjen er sammenfaldende med synsstrålen for ethvert punkt på linjen (se figur 1). Desuden er ℓ og ℓ_0 sammenfaldende og dermed F_ℓ og S_ℓ også sammenfaldende. b) Hvis linjen ikke passerer igennem øjepunktet har vi en situation som på figur 20.

Figur 20



Husk definitionen af forsvindingspunkt fra afsnit 2: Forsvindingspunktet F_ℓ for en dybdelinje ℓ fås ved at betragte den linje ℓ_0, som er parallel med ℓ og som går gennem øjepunktet, og bestemme denne linjes skæringspunkt med billedplanen. Billedpunkterne for ethvert punkt på ℓ må ligge i planen, som indeholder ℓ samt øjepunktet *O*. Da skæringen mellem denne plan og billedplanen er den linje, som passerer igennem F_ℓ og S_ℓ, må alle billedpunkterne ligge på denne linje. Alle punkter på linjen gennem F_ℓ og S_ℓ kan forekomme som billedpunkter, bortset fra F_ℓ selv (Overvej!). Figur 20 antyder også, at hvis et punkt P bevæger sig ud af linjen ℓ, så vil dets billedpunkt Q *konvergere* mod forsvindingspunktet F_ℓ. Dette er illustreret ved at se på to punkter P_1 og P_2 og deres respektive billedpunkter Q_1 og Q_2. I appendiks A vil der blive givet et matematisk bevis for denne påstand. c) Følger direkte af, at parallelle linjer har samme linje ℓ_0. d) En plantegning af situationen ser ud som på figur 21. Påstanden fås umiddelbart ved at regne på den retvinklede ΔOHF_ℓ.

Figur 21

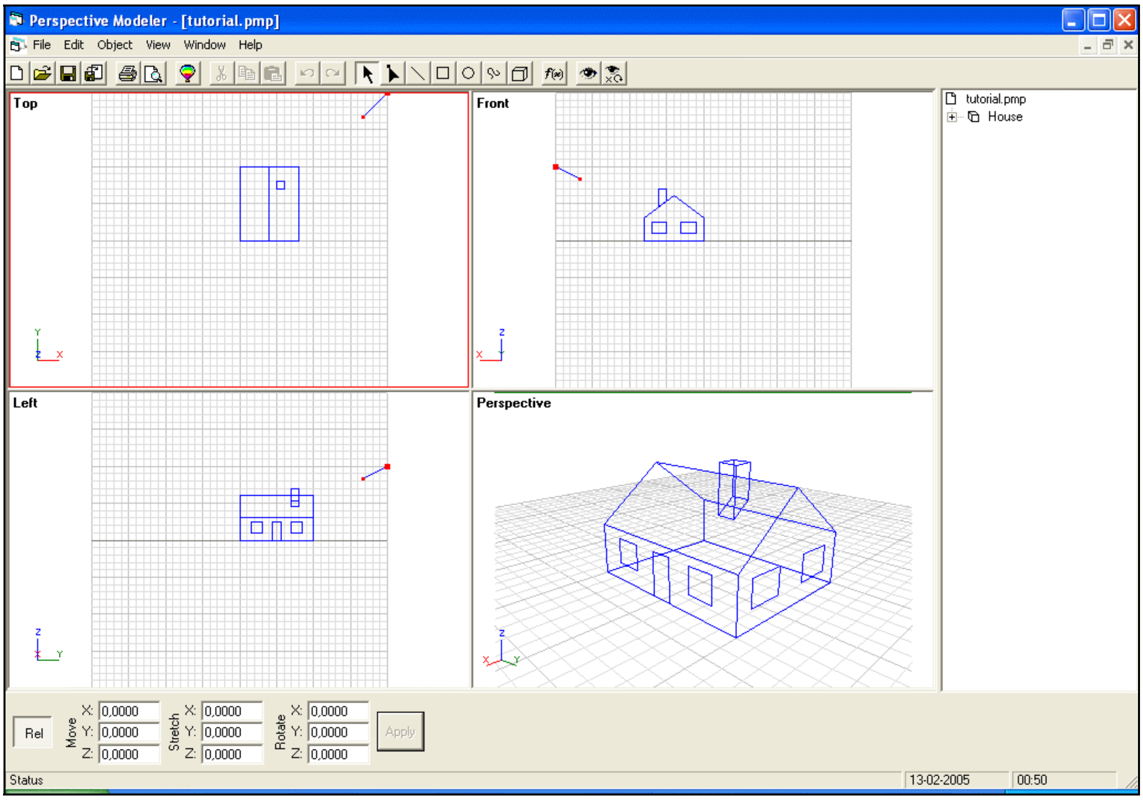


□

7. Introduktion til Perspective Modeler

I dette afsnit skal vi introducere programmet *Perspective Modeler*, som kan downloades fra hjemmesiden angivet i notens indledning. Programmet kan benyttes til at fremstille perspektivisk korrekte tegninger. Programmet er velegnet til undervisningsbrug til at afprøve nogle af perspektivets egenskaber fra de forrige afsnit samt til at lade elever eksperimentere på egen hånd. Lad os se på programmets hovedstruktur. Programmet er indrettet, så brugeren skal beskrive et objekt i rummet, samt beskrive hvorfra det ses foruden billedplanens placering, hvorefter programmet automatisk vil beregne det perspektiviske billede. Sidstnævnte kan ses i feltet *Perspective* nede til højre (se figur 22). Man kan frembringe forskellige objekter – linjer, rektangler, kasser og mere generelle kurver – via værktøj i værktøjslinjen. Når et værktøj er valgt kan man frembringe objektet i en af de tre projektionsplaner af rummet kaldet *Top*, *Front* og *Left*. *Top* viser scenen projiceret ned i *xy*-planen (plantegning), *Front* viser situationen projiceret ind i *xz*-planen (opstalt) og *Left* viser situationen projiceret ind i *yz*-planen (opstalt). Efter et objekt er dannet, kan man redigere, strække, flytte, rotere, kopiere samt slette det. Ude til højre i vinduet har vi den såkaldte *Object Manager*, som er en træstruktur, som holder styr på de enkelte objekter og delobjekter. Det næste vigtige punkt er, hvordan objektet betragtes. Her skal øjepunktet specificeres og en synsretning samt en distance (d). Øjepunkt og synsretning kan tilpasses interaktivt via den lille *synspil*, som befinder sig i hver af de tre projektionsplaner. I enderne af synspilen er der et stort og et lille rødt punkt. Det store angiver øjepunktets placering. Synspilens retning angiver synsretningen. Disse to størrelser kan også specificeres manuelt ved koordinater i *Edit Perspective* dialogboksen, som kan frembringes via menuen *View* > *Edit Perspective...* eller ved blot at klikke på knappen med øjet i værktøjslinjen. Her kan distancen i afbildningen også sættes. Dette er hovedingredienserne i programmet. Det vil føre for vidt at gennemgå alle funktioner i detaljer. I stedet vil læseren blive ledt igennem vigtige dele af programmet i et eksempel (en tutorial) i næste afsnit.

Figur 22



8. Perspective Modeler: En tutorial

Frem for at gennemgå Perspective Modelers funktioner én efter én vil det være mere hensigtsmæssigt at se på en konkret opgave, og så vise læseren skridt for skridt hvordan denne opgave løses. Det betegnes en *tutorial*. Lad os sige, at vi ønsker at skabe en terning og betragte den fra forskellige positioner for at undersøge, hvordan det perspektiviske billede tager sig ud. Tastaturgenveje skrives i parentes. Husk, at hvis du kommer til at gøre noget forkert kan du altid klikke på fortryde-værktøjet (*Undo*) i værktøjslinjen.

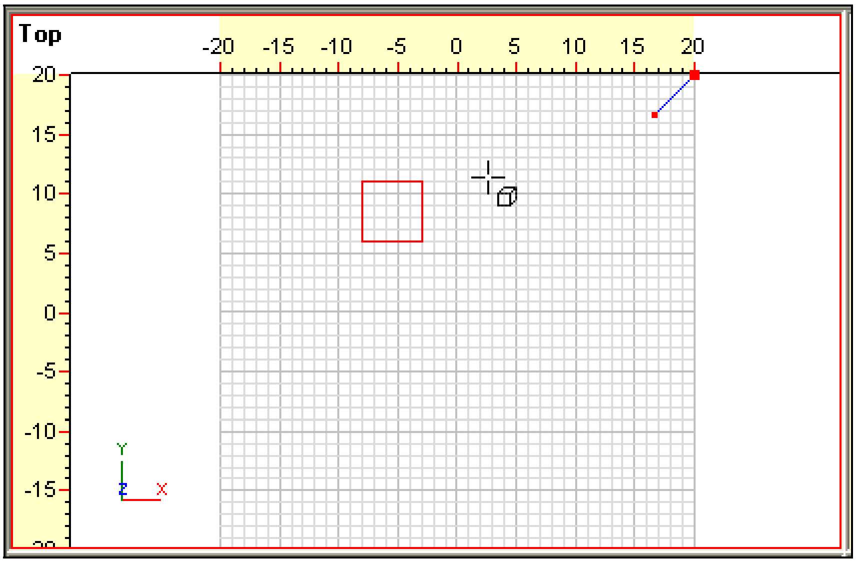
a) Bemærk, at feltet *Top* øverst til venstre er omkredset af en rød ramme. Det betyder, at feltet er aktiveret og klar til at arbejde i. Prøv for sjov skyld at klikke et sted i feltet *Front* og se at det nu bliver aktiveret. Hvis du herefter højreklikker i feltet vises en forstørret udgave af feltet. Højreklikkes igen i feltet er man tilbage. Det samme kan gøres i de andre felter ... En anden mulighed for at zoome ind er at anvende F2-tasten og trække et felt ud. F3-tasten bringer én tilbage igen ...

b) Der er allerede et objekt i rummet, nemlig et hus. Aktiver feltet *Top* og marker huset ved at klikke et sted i nærheden af huset. Når det er markeret, vises huset nu i rødt. Tryk på Delete-tasten på tastaturet, hvorefter huset forsvinder.

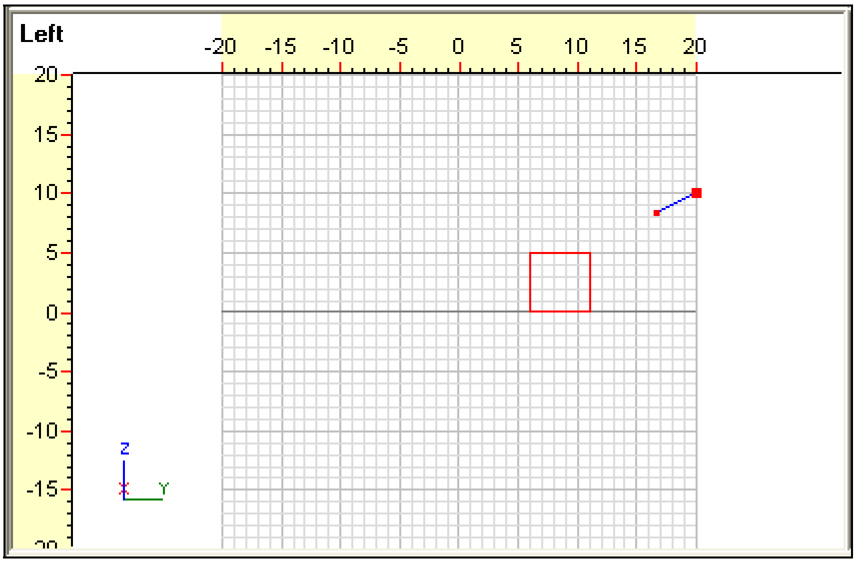
c) Du kan se *scenens* dimensioner via menuen *View* > *Rulers* (Ctrl+R). Ved at kigge i de forskellige felter kan man se, at defaultdimensionerne af scenen er $-20 \le x \le 20$, $-20 \le y \le 20$ og $-20 \le z \le 20$. Du kan vedtage med dig selv, at det er meter. Skulle scenens dimensioner ikke være tilfredsstillende kan de ændres i dialogboksen *Scene Properties*, som kan nås fra menuen *View* > *Scene Properties...* (F6). Her kan du også ændre linjernes tykkelser og farver og ændre på gitteret m.m. Men som situationen er her stiller vi os tilfreds med default værdierne. Bemærk, at en fornyet brug af Ctrl+R vil fjerne linealerne igen.

d) Vi er nu klar til at lave terningen. Klik på Box Tool (*ikke* Rectangle Tool!!) i værktøjslinjen og bemærk, at cursoren skifter udseende! Kasseværktøjets virkemåde er lidt specielt, idet man skal frembringe en tredimensional figur i et felt, som er todimensionalt. Dette lader sig gøre ved at man i feltet *Top* først trækker et rektangel ud i *xy*-planen og når man slipper venstre museknap er objektet endnu ikke færdigt. Kig nemlig i de to øvrige felter *Front* og *Left* og bemærk, at højden endnu ikke er dannet. Når du bevæger cursoren op eller ned vil højden nemlig ændres i disse felter. Når du har placeret cursoren, så en tilfredsstillende højde er opnået, foretager du et sidste venstreklik, hvorefter kassen endelig er færdig. Lad os sige, at vi ønsker at lave en terning med sidelængden 5 meter. Da gitterlinjerne har afstanden 1 meter skal vi altså lave en kasse på 5 gange 5 gange 5 enheder. Hvis du holder Shifttasten nede samtidigt med at du frembringer kassen, vil programmet udføre *Snap to Grid*, dvs. kassen vil holde sig til gitterlinjerne! Vær ikke så bekymret for hvor du anbringer kassen. Under punkt e) vil vi alligevel flytte kassen!

Figur 23

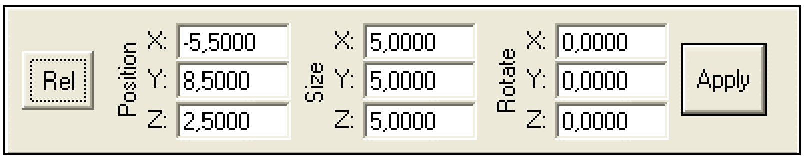


Figur 24



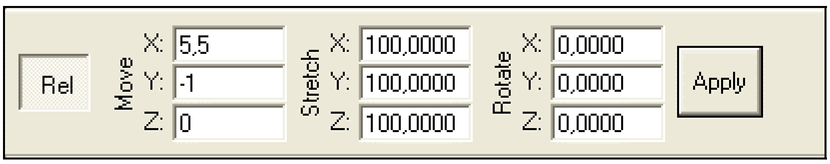
e) Vi skal nu have transformeret kassen. Start med at vælge pegeværktøjet (*Pick Tool*) i værktøjslinjen og marker objektet, så det fremstår i rødt, hvis det ikke allerede er tilfældet. En mulighed for at redigere kassen eller dens placering er via dataværdierne i bjælken nederst til venstre. Da *Rel*-knappen *ikke* er trykket ned, er der tale om de *absolutte* data for objektet, her terningen. Lad os lige betragte disse data, selv om vi ikke vil gøre brug af dem her:

Figur 25



Position angiver centrum for det markerede objekt og *Size* angiver objektets dimensioner i x-, y- og z-retningen. Med *Rotate* kan du rotere objektet med forskellige vinkler (i gradtal) om forskellige akser. Da vi imidlertid blot ønsker at flytte objektet, så er det nemmest at anvende *relative* data ved at klikke på *Rel* knappen:

Figur 26

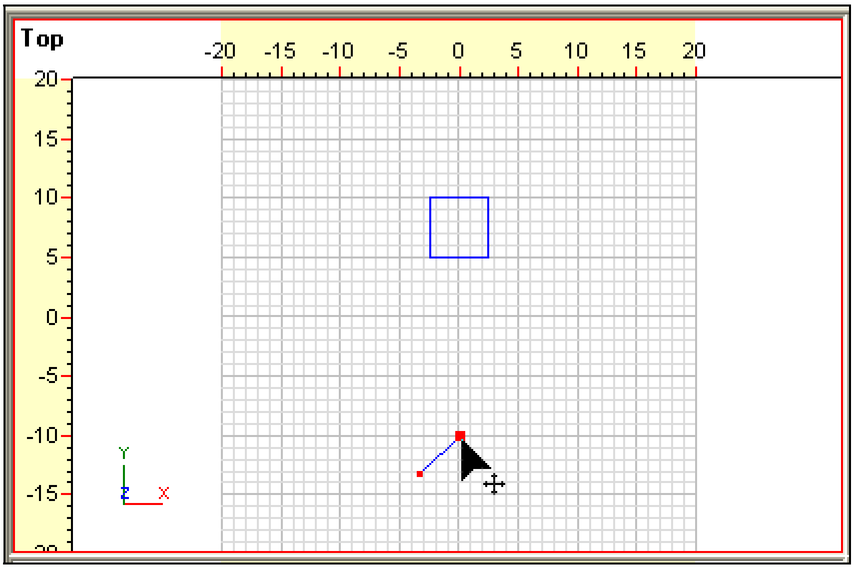


Vi ønsker at flytte terningen, så den i feltet *Top* kommer til at se ud som på figur 27 på næste side og så terningen kommer til at stå på ”jordoverfladen”: $z = 0$. Det vil ifølge figur 23 kræve, at vi flytter terningen med 5,5 i x-aksens retning og med –1 i y-aksens retning. Ifølge figur 24 står terningen allerede på jorden, så vi skal ikke flytte terningen i z-aksens retning. Derfor indtastes de i figur 26 anførte værdier for *Move*. I dit tilfælde kan det sagtens være nogle andre værdier, som skal indtastes, alt efter, hvor du har anbragt terningen. Klik på *Apply* for at gennemføre flytningen.

NB! Man kan også flytte objektet interaktivt ved at trække i det med pegeværktøjet. Men da terningen skal flyttes et ikke helt antal gitterlinje-enheder, så kan vi ikke bruge *Snap to Grid* her, hvilket betyder, at det er svært at flytte den præcist! Hvis objektet er markeret, kan også *piletasterne* benyttes til at flytte objektet med, men da terningen igen ikke skal flyttes et helt antal gitterlinje-enheder, så er det ikke heller ikke så velegnet her ...

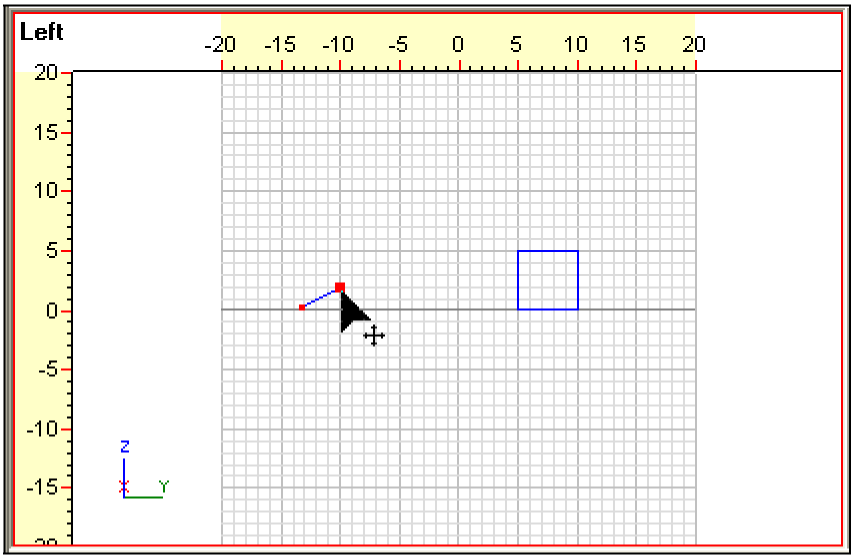
f) Vi er klar til at fortælle, hvordan terningen skal betragtes. Øjepunktet skal flyttes ned i $(0,-10,2)$ og synsretningen skal rettes i y-aksens retning. Interaktivt kan det gøres således: Vælg pegeværktøjet og aktiver feltet *Top*. Anbring cursoren i nærheden af den store røde prik på synspilen. Cursoren ændres til en stor sort pil med et særligt tegn. Træk nu den store røde prik ned i punktet $(x,y)=(0,-10)$, idet du samtidigt holder Shift tasten nede, så der er Snap to Grid. En anden måde er at anvende piletasterne, mens objektet *ikke* er markeret! Vi har nu:

Figur 27

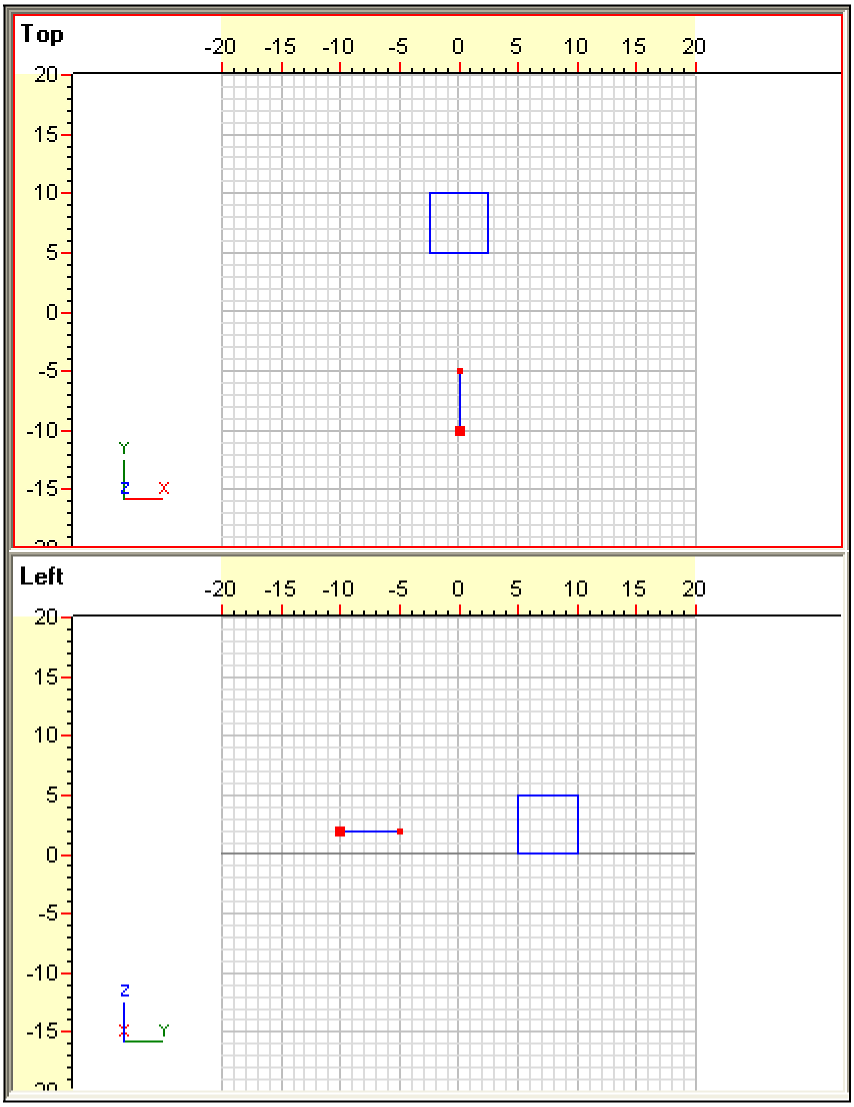


For at bevæge øjepunktet i lodret retning må vi ned i feltet *Left*. Aktiver det og træk nu, analogt til ovenfor, øjepunktet lodret nedad, så z-koordinaten bliver 2. Igen kunne piletasterne være anvendt i stedet ... Figur 28 viser, hvordan det skal se ud. Vi mangler stadig at rette synsretningen ind. Det kan vi også gøre interaktivt ved at trække med pegeværktøjet i det *lille* røde punkt på synspilen. Idet du holder Shift-tasten nede igen for at aktivere Snap to Grid skal du tilrette synsretningen, først i feltet *Top*, derefter i feltet *Left*, så det ser ud som på figur 29 på næste side.

Figur 28

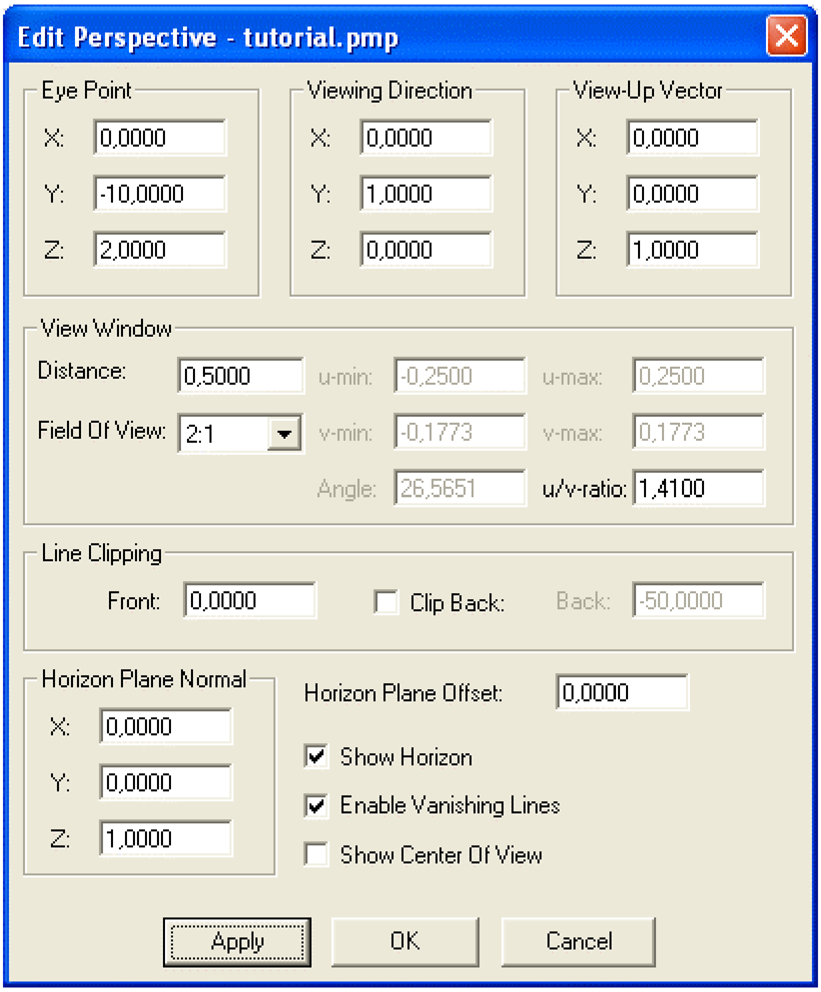


Figur 29



I stedet for den interaktive metode omtalt ovenfor kan man vælge at indtaste koordinater for øjepunktet og synsretningen direkte i *Edit Perspective* dialogboksen. Denne dialogboks fås frem via menuen *View* > *Edit Perspective...* eller ved bare at klikke på knappen med øjet i værktøjslinjen. Indtast nu øjepunktets koordinater i Eye Point og synsretnings-vektorens koordinater i *Viewing Direction*. Da synsretningen er i y-aksens retning og i øvrigt vandret vil $(0,1,0)$ være et passende valg – længden af vektoren er ligegyldig!

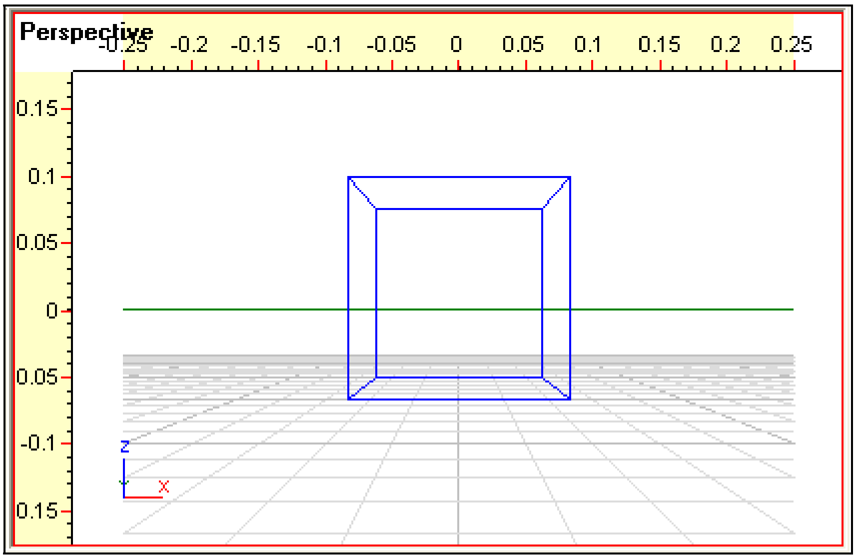
Figur 30



Metoden med at skrive værdier direkte ind i dialogboksen er især hensigtsmæssig i de tilfælde, hvor øjepunktet eller synsretningen har nogle lidt "skæve" koordinater og derfor vil være svære at afpasse med musen eller ved hjælp af piletasterne.

g) I feltet *Perspective* kan du se det færdige perspektiviske billede (se figur 31). Bemærk, at horisontlinjen også er indtegnet, samt billedet af gitteret. Hvis du ønsker horisontlinjen fjernet kan det gøres ved at fjerne mærket ud for *Show Horizon* i *Edit Perspective* dialogboksen (se figur 30). Gitteret kan fjernes via menuen *View* > *Grid*.

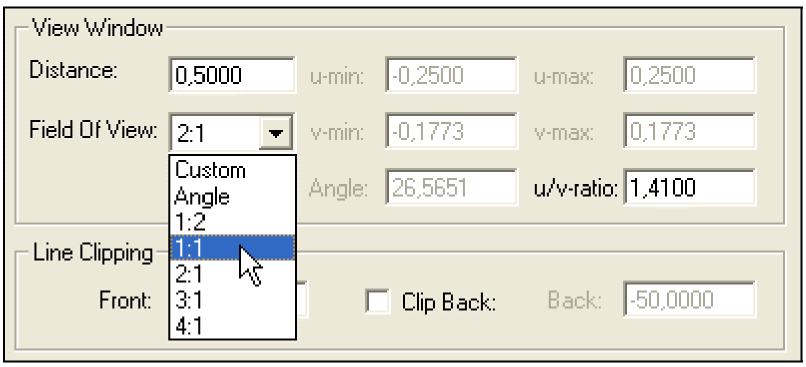
Figur 31



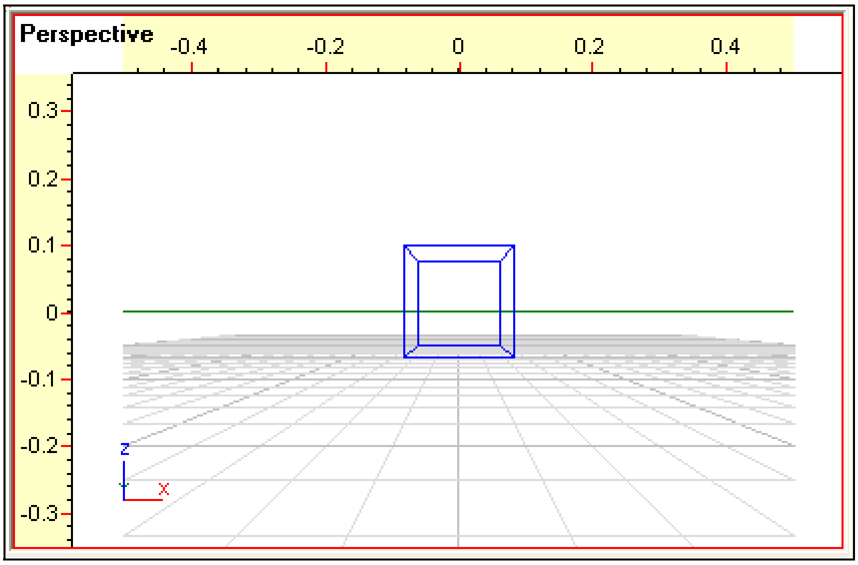
I dialogboksen *Edit Perspective* kan du også sætte *distancen* (*d*) i billedet, dvs. afstanden mellem øjepunktet og billedplanen. Som default-værdi er den sat til 0,5. Hvis du ændrer værdien af *d* vil det blot ændre på størrelsen af det perspektiviske billede. Derfor vil der i feltet *Perspective* blot ske det, at talværdierne på akserne ændres. På skærmen vil billedet fremstå uændret!

h) Et andet aspekt er *synsfeltet*, som i dialogboksen *Edit Perspective* omtales som *Field of View*. Denne størrelse handler løst sagt om, hvor stor en vinkel man kan se til siderne i forhold til synsretningen. Defaultværdien for synsfeltet er 2:1 (2 til 1). Den præcise definition heraf vil blive givet i afsnit 9. Prøv for eksempel at ændre *Field of View* til 1:1, som angivet på figur 32. Det betyder, at en større vinkel vises, som det kan ses på figur 33. Det kunne se ud som om det perspektiviske billede af terningen er blevet mindre, men det er ikke tilfældet, som man kan overbevise sig om ved at se på linealen. Det er fuldstændigt uændret. Men da en større del af scenen ønskes vist på det samme antal pixels på skærmen, må terningen nødvendigvis blive vist mindre på skærmen!

Figur 32



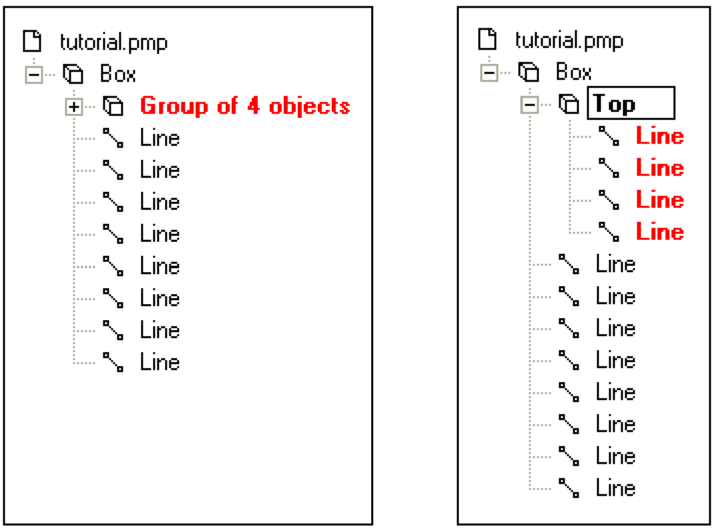
Figur 33



Efter du har afprøvet det større synsfelt afslut da dette punkt med at klikke på fortrydelsesknappen (*Undo*), så du kommer tilbage til den gamle værdi for synsfeltet, så det perspektiviske billede igen ser ud som på figur 31.

i) Betragt *Object Manageren* til højre. Her kan du klikke på plustegnet for at ekspandere objektet "Box". Man ser, at det består af en række linjer. Marker de fire første linjer et efter et og bemærk i hvert enkelt tilfælde hvilken linje det svarer til i terningen, idet den pågældende linje vil blive farvet rød. Man ser, at disse fire linjer svarer til toppen i terningen. Det kunne være fornuftigt at *gruppere* disse fire linjer i et delobjekt: Marker de fire øverste linjer et efter et mens du holder Shift tasten nede, så de alle er markeret med rødt. Vælg nu menuen *Object* > *Group* (Ctrl+G). Det nye objekt vil automatisk få navnet "Group of 4 Objects".

Figur 34 og 35

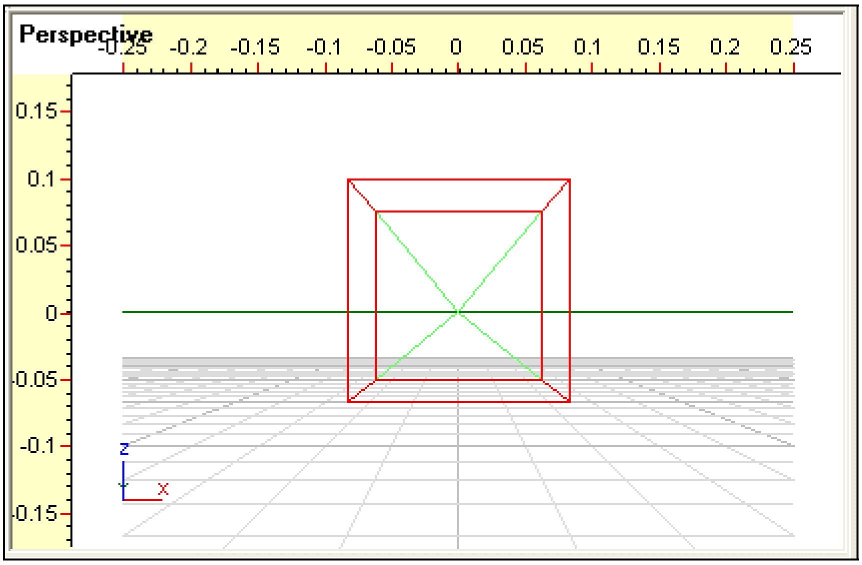


Resultatet ses på figur 34. For at du bedre kan huske hvad dette grupperede objekt er, kan det være fornuftigt at give det et nyt navn, for eksempel ”Top”. Dertil klik på det grupperede objekt to eller tre gange til det bliver muligt at ændre navnet til ”Top”. Resultatet ses på figur 35. Man kan ophæve en gruppering ved at markere det grupperede objekt og vælge menuen *Object* > *Ungroup* (Ctrl+U).

j) Undertiden kan det for at undgå linjeforvirring være hensigtsmæssigt at skjule visningen af et objekt uden at slette det helt. Dette kan gøres ved at markere et objekt og herefter vælge menuen *Object* > *Visible* (Ctrl+H, H for *Hide*). Prøv det af! I *Object Manageren* vises det skjulte objekt ved røde overstregninger. Du kan gøre objektet synligt igen ved at gentage ovenstående.

k) Vi skal nu se på forsvindingspunkter for forskellige dybdelinjer i terningen. Marker hele terningen ved at klikke på ”Box” i *Objekt Manageren* og vælg menuen *Object* > *Show Vanishing Lines* (F5). Dette vil få programmet til automatisk at skabe linjer til forsvindingspunkterne for samtlige dybdelinjer i objektet. Da alle fire dybdelinjer er parallelle vil de ifølge sætning 6 have samme forsvindingspunkt, og det bliver her hovedpunktet (Overvej!).

Figur 36

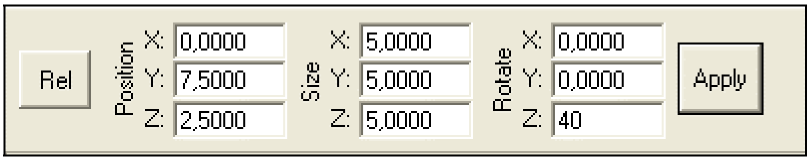


Du kan fjerne linjer til forsvindingspunkterne ved at gentage ovenstående, dvs. markere ”Box” og bruge F5-tasten. Hvis du er utilfreds med linjetykkelser og/eller farver for de forskellige elementer, kan de ændres i *Scene Properties* dialogboksen, som kan nås via menuen *View* > *Scene Properties*... (F6).

l) Slut denne første sekvens af med at gemme perspektivtegningen med alle indstillinger via menuen *File* > *Save As*... med navnet ”frontperspektiv.pmp”.

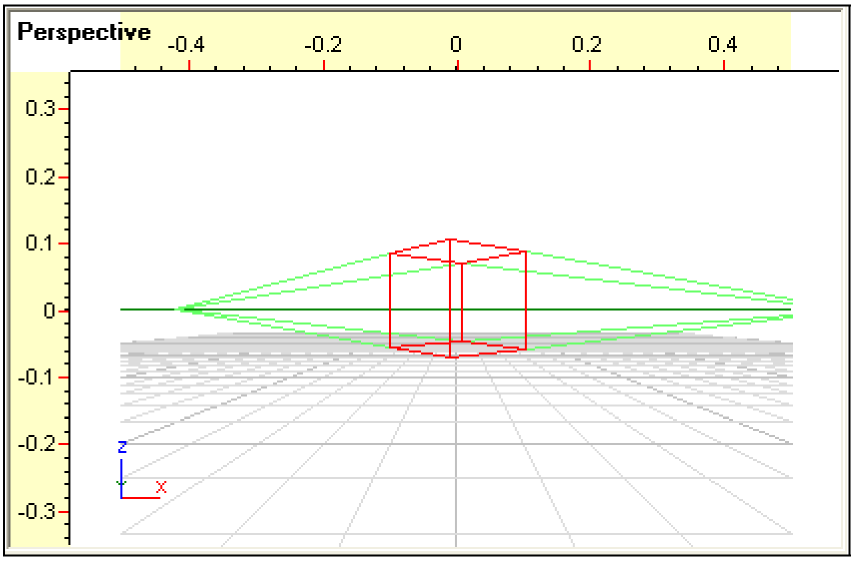
m) Lad os arbejde videre med perspektivtegningen fra punkt l). Vi vil prøve at rotere terningen med 40° omkring en lodret akse. Til det skal du markere terningen ved at klikke på terningen i et af felterne eller klikke på ”Box” i *Object Manageren*, så terningen bliver rød. Indtast nu værdien 40 i *z*-koordinaten i feltet *Rotate* forneden til venstre. Klik derefter på *Apply*, hvorefter du kan se, at terningen er drejet omkring en lodret akse igennem dets centrum med de 40°.

Figur 37



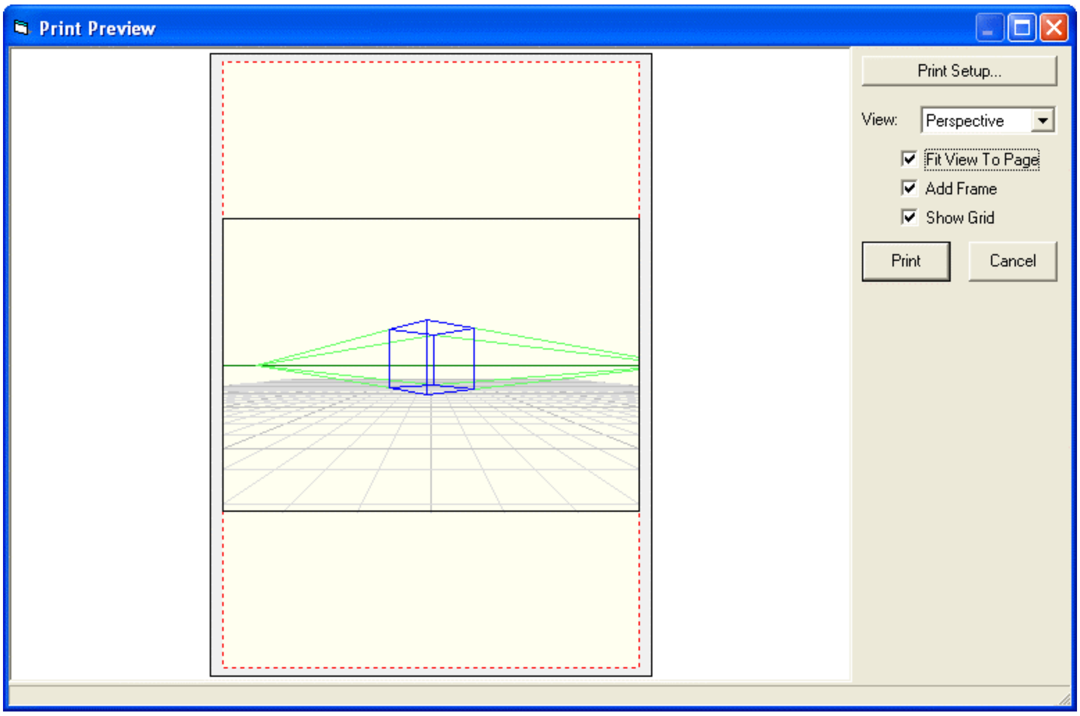
n) Bemærk, at linjerne til forsvindingspunkterne stadig bliver tegnet, men at de selvfølgelig har flyttet sig. Der er nu opstået to forsvindingspunkter – vi har at gøre med et såkaldt *topunkts-perspektiv*. Vi siger også, at terningen betragtes i *X-perspektiv* i modsætning til *frontperspektivet* fra punkt k). Desværre kan ingen af forsvindingspunkterne ses i feltet *Perspective*, fordi synsfeltet er for lille. Hvis du ændrer *Field of View* til 1:1 i dialogboksen *Edit Perspective*, jvf. punkt h), så kan det ene af de to forsvindingspunkter ses:

Figur 38



o) Gem filen som ”X-perspektiv.pmp” via *File > Save As...* Lad os herefter slutte af med at printe den sidste perspektivtegning fra figur 38 ud. Her er det fornuft at vælge *File > Print Preview....* Måske kommer der en *Indstil Printer* dialogboks fra Windows frem først. Hvis det er tilfældet kan du bare klikke OK, hvorefter *Print Preview* dialogboksen fremkommer. Sørg nu for at vælge *Perspective* i dropdownmenuen *View*. Herudover kan du vælge at afmærke *Add Frame*, som tilføjer en ramme om billedet, afmærke *Show Grid*, som betyder, at det underliggende gitter udskrives. Endelig kan *Fit View To Page* afmærkes. Det betyder, at billedets størrelse afpasses, så det kan være på A4-arket. Hvis du vælger at fjerne afmærkningen her, og det kan der undertiden være grund til, så vil man få et perspektivisk billede, som har den fuldstændigt korrekte størrelse i forhold til de valgte data.

Figur 39



Bemærk, at man også kan printe et af de andre projektionsfelter *Top*, *Front* eller *Left* ud, ved at vælge den pågældende projektion i dropdown-menuen *View*.

p) Endelig skal det nævnes, at du også kan eksportere i emf-format, som står for *ex*-tended-*m*eta-*f*ile. Fordelen er, at du får en fil, som kan indsættes som billede i et tekstbehandlingssystem såsom Microsoft Word. Du kan eksportere et vilkårligt af projektionsfelterne ved at aktivere det og vælge menuen *File* > *Export...* osv.

NB! Allerbedst er det at eksportere til CorelDRAW, men det kræver, at du har en licens til dette program. I CorelDRAW kan man redigere i stor stil ....

9. Centralprojektionmodellens egenskaber og begrænsninger

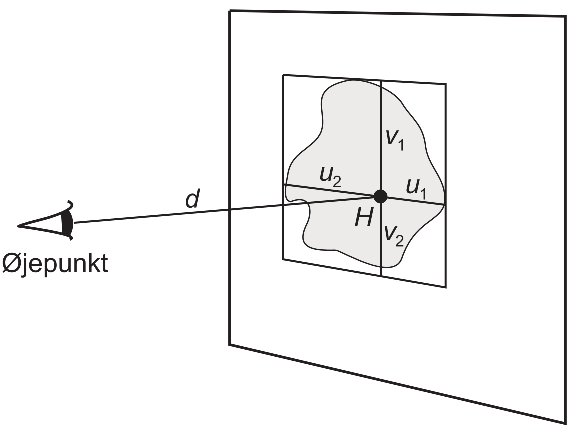
Lad os starte med centralprojektionsmodellens begrænsninger. For det første er et øje ikke helt punktformigt, som modellen antager. For det andet benytter mennesker normalt to øjne til at se med. Men udover den forøgede evne til at vurdere afstande har det dog ikke nogen stor betydning, idet hjernen kombinerer de to billeder til et, som ikke i nogen væsentlig grad afviger fra det billede man oplever ved kun at benytte ét øje – prøv bare at lukke det ene øje og se, hvad der sker! En anden, meget væsentlig begrænsning, som kommer bag på mange, er følgende:

Man kan kun forvente, at det perspektiviske billede ser ud som den rigtige 3D-genstand, hvis det færdige billede betragtes fra samme position i forhold til billedet, som da billedet blev skabt ved centralprojektion.

I en vis forstand kan man sige, at der til ethvert færdigt perspektivisk billede er knyttet et ganske bestemt øjepunkt. Hvis billedet ikke betragtes fra dette øjepunkt, så skal man ikke regne med, at det man ser, svarer til at betragte den virkelige 3D-genstand fra en ny position! Det er vel heller ikke så underligt, da der er gået en mængde information tabt, ved at den tredimensionale genstand er projiceret ned på en todimensional flade? Et perspektivisk billede indeholder altså normalt kun information om, hvordan 3D-genstanden ser ud fra én bestemt position.

Et maleri er altså i princippet beregnet til at skulle ses fra et ganske bestemt punkt. Ses billedet fra en anden position, vil motivet ofte se forvrænget ud. Det viser sig dog, at man ofte kan minimere forvrængningen, hvis man ikke afbilder en for stor *synsvinkel*, samt at man ved betragtningen af det færdige billede ikke anbringer øjet for langt fra billedets tilknyttede øjepunkt, specielt ikke for meget til siden i forhold til billedplanen!

Figur 40

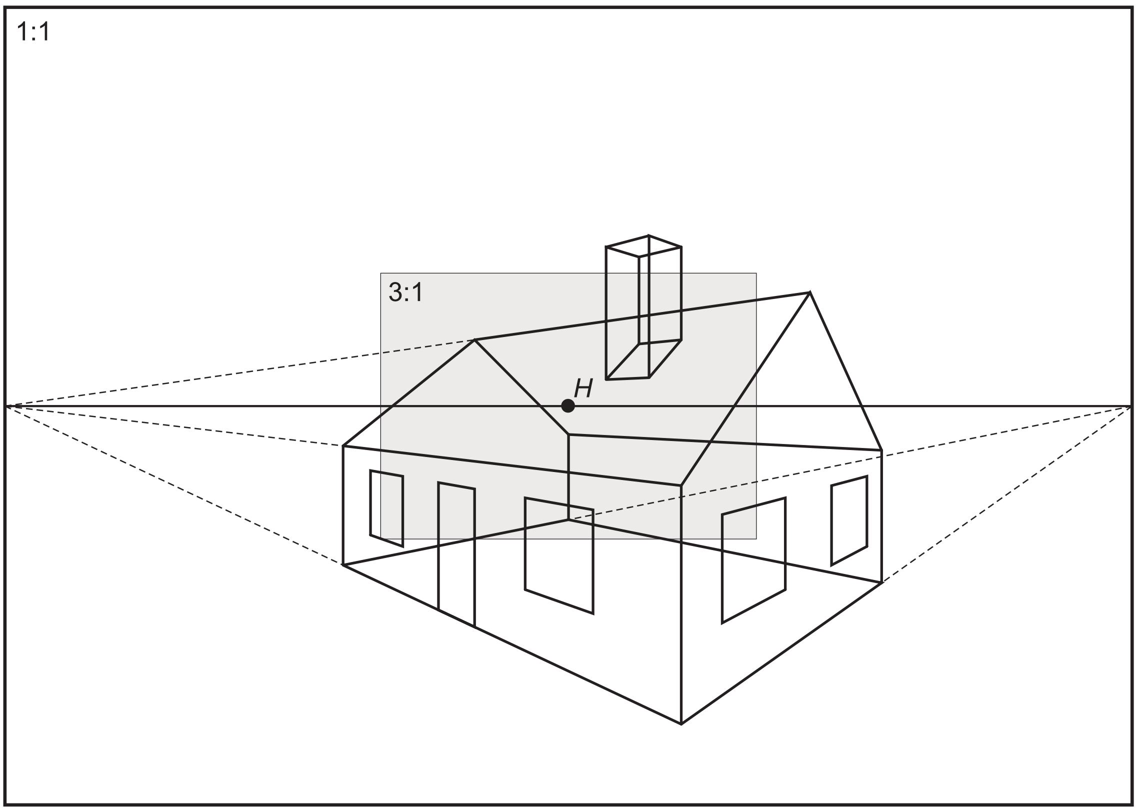


Figur 40 viser et perspektivisk billede, som i vandret retning rækker u_1 til højre for hovedpunktet H og u_2 til venstre for H, og som i lodret retning rækker stykket v_1 over H og stykket v_2 under H. Den største udstrækning i vandret/lodret retning i billedplanen er altså $a = \max\{u_1, u_2, v_1, v_2\}$. Da defineres billedets *distanceforhold* som forholdet mellem distancen i billedet og nævnte udstrækning, altså d/a. Hvis dette forhold for eksempel giver 3, vil vi omtale det som at distanceforholdet er 3:1 (”3 til 1”). Et *front-perspektiv* er et perspektiv, hvor de fleste og vigtigste linjer i virkeligheden er parallelle med billedplanen eller vinkelrette derpå, som tilfældet er på figur 36. I et såkaldt *X-perspektiv* ligger de vigtige linjer i virkeligheden ”på skrå”, som tilfældet er på figur 38. Der findes en række tommelfingerregler for, hvor lille et distanceforhold man bør anvende i et billede. Lad blot to af dem blive nævnt her:

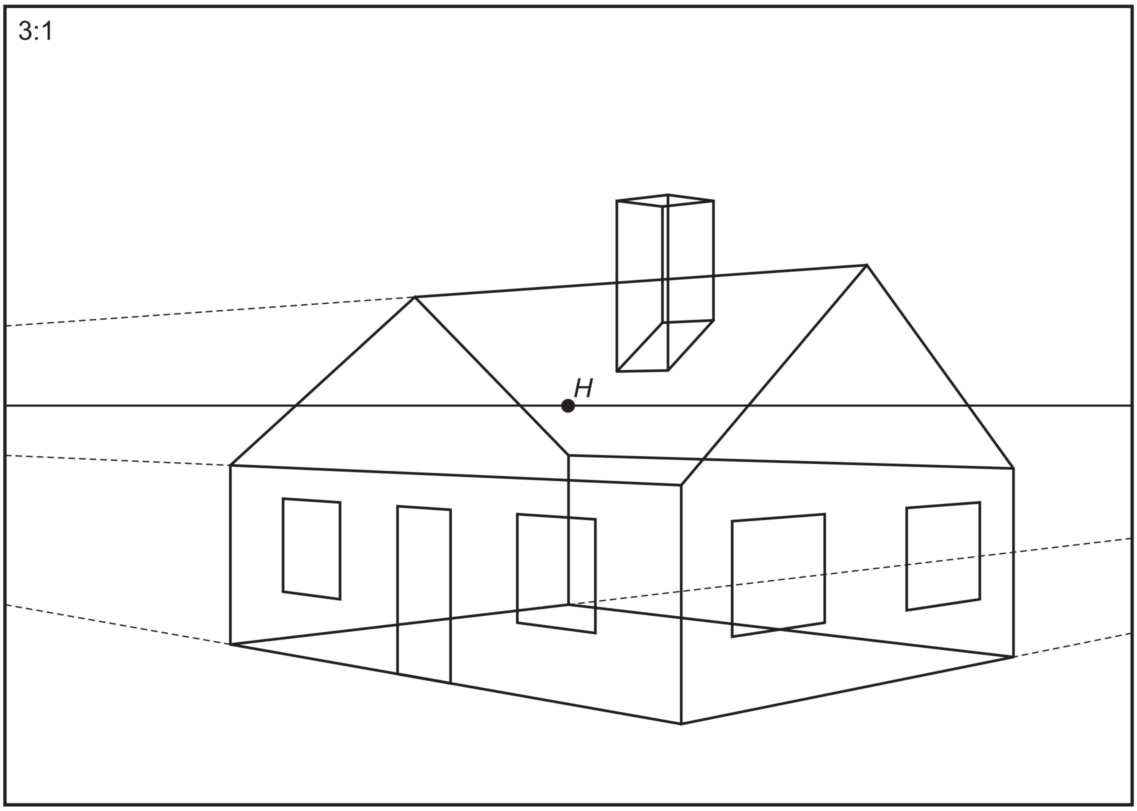
Frontperspektiver bør afbildes med et distanceforhold på mindst 2:1.
X-perspektiver bør afbildes med et distanceforhold på mindst 3:1.

Reglerne er empiriske, altså fremkommet gennem studiet af et væld af praktiske perspektivtegninger. Figur 41 nedenfor viser billedet af et hus i X-perspektiv, hvor tommelfingerreglerne *ikke* er opfyldt. Billedet har distanceforhold 1:1 og man ser, at huset ser noget forvrænget ud, selv om det er perspektivisk korrekt udført. Det skyldes, at *forkortningerne* er meget kraftige. Hvis reglerne skulle have været opfyldt med den aktuelle placering af iagttageren, so skulle kun en lille del af huset være på billedet, nemlig den del, som er indenfor det inderste lille grå rektangel! Den eneste mulighed for at få hele huset med og samtidigt overholde reglen for X-perspektiver er at iagttageren bevæger sig længere væk fra huset. Dette er vist på figur 42.

Figur 41



Figur 42



Vi ser på figur 42, at forkortningerne er væsentligt mindre end de er på figur 41. Samtidigt ser vi, at mens forsvindingspunkterne for husets side lige netop kan være på figur 41, så ligger de udenfor perspektivtegningen på figur 42. Det sidste er et typisk træk for ”fornuftige” tegninger i X-perspektiv! Men *hvorfor* er distanceforholdet da så vigtigt for, at perspektivtegningen kommer til at se realistisk ud? Forklaringen skal findes i, at et lille distanceforhold giver en stor synsvinkel (se opgave 9.1), og når en stor synsvinkel afbildes i et billede er det ekstra følsomt overfor at blive betragtet fra en forkert position. Som eksempel kan vi betragte figur 41 igen. Billedet er konstrueret til at blive set fra en afstand af 7 cm, lige ud for hovedpunktet H. Hvis det havde været muligt at fokusere i denne afstand ville billedet have set fuldstændigt naturligt og korrekt ud. Imidlertid vil billedet ofte blive betragtet i en noget større afstand, måske 25-50 cm, og så kommer det altså til at se forvrænget ud, særligt på grund af den store synsvinkel. Figur 42 er konstrueret til at ses fra en afstand af 21 cm, og er ikke nær så følsom overfor at blive betragtet fra en forkert position.

I forståelsen af perspektivet er det en uhyre vigtig erkendelse, at man holder hjernens fortolkning og behandling af de billedinformationer, hjernen modtager via nervetrådene, fuldstændigt ude af betragtning, når man søger at forklare centralperspektivets succes:

Det eneste centralprojektionsmodellen skal gøre er at levere de samme synspåvirkninger, som den rigtige genstand ville have gjort.

Dette sikrer, at øjet modtager de samme data i form af lys fra billedet, som øjet modtager fra den virkelige genstand! Dette sluttes eftersom øjet ikke kan skelne to punkter, som ligger på samme rette linje til øjet. Vi går her udfra, at lyset bevæger sig ad rette linjer! Når øjet modtager de samme informationer, må hjernen også opfatte det på samme måde. Her skal dog gives et lille forbehold: Genstande, som ses på lang afstand vil ofte forekomme mere diffuse i randen og mindre farvemættede og ofte med en vis blåfarvning. Dette skyldes lysets passage gennem atmosfæren. Malere tager ofte hensyn til dette fænomen, som betegnes *luftperspektiv*. På trods af dette kan vi gå udfra, at centralprojektionsmodellen tilnærmelsesvist leverer de samme synspåvirkninger, som den rigtige genstand gør.

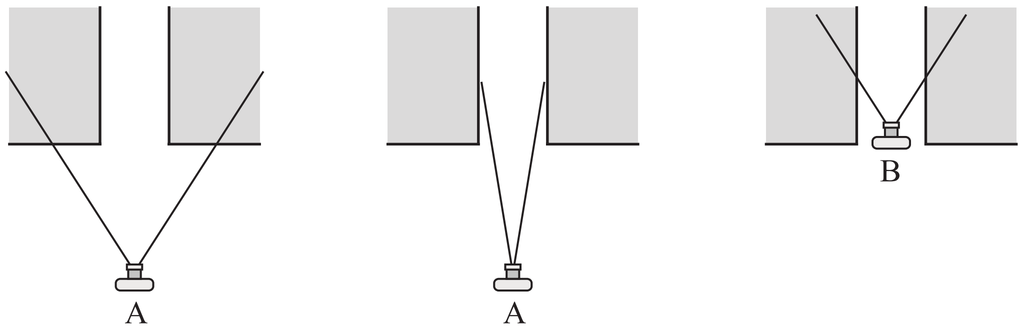
10. Kameraer og perspektiv

Blandt fotografer er det velkendt, at billeder taget med *vidvinkelobjektiv* ofte fremstår med stor dybdevirkning på grund af de kraftige forkortninger. Denne effekt gør disse objektiver særligt populære blandt verdens bedste reportage-fotografer, idet det kan give fotoet en dramatisk effekt. Teleobjektiver derimod har den stik modsatte virkning, idet de forekommer at gøre billedet ”fladere”. Vi kender det fra optagelser fra opløbet i et cykelløb: Selvom cyklisterne sprinter som gale, synes de ikke at komme ud af stedet. Genstandene synes at blive ”trængt sammen i dybden”. Ovenstående får mange til at tro, at et kamera med nævnte objektiver ikke gengiver et motiv perspektivisk korrekt. Dette er imidlertid *forkert*! Der gælder derimod:

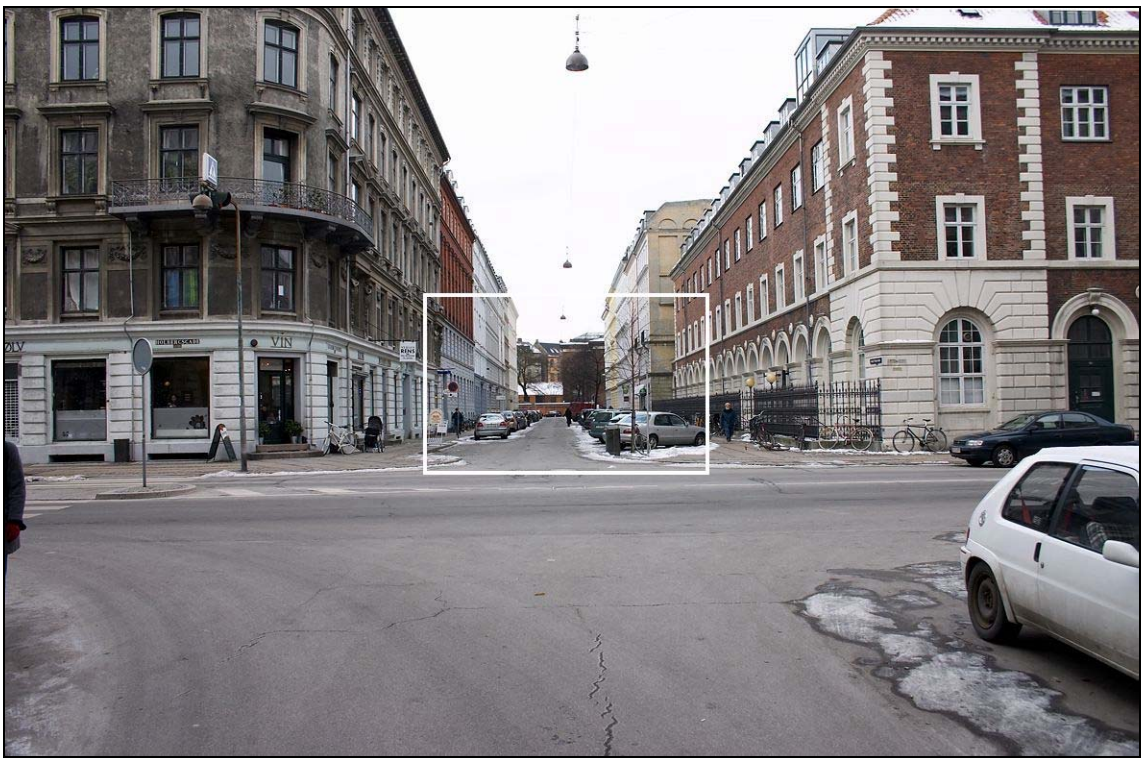
Hvis vi har at gøre med et objektiv, hvis linsefejl er så ubetydelige, at man kan se bort fra dem, da vil brug af dette objektiv resultere i billeder, som er perspektivisk korrekte.

Enhver producent af objektiver søger at fjerne linsefejl så godt som muligt. I rigtigt dyre objektiver er linsefejlene kun ganske ubetydelige. Mindre gode objektiver gengiver undertiden rektangulære motiver med en synlig tøndeform (*fortegning*). Det er klart, at dette ikke kan være perspektivisk korrekt, da rette linjer ikke afbildes i rette linjer ... Men som sagt: Kameraobjektiver gengiver i princippet virkeligheden perspektivisk korrekt! Men hvor skal forklaringen på de meget forskelligartede resultater for billeder taget med teleobjektiver og vidvinkelobjektiver da søges? Svaret er, at den igen skal søges i synsfeltets størrelse. Et vidvinkelobjektiv gengiver en meget stor synsvinkel, dvs. distancen i billedet er meget lille sammenlignet med billedets dimensioner. Derfor vil billedet normalt blive betragtet fra en noget større afstand end det er beregnet til. Omvendt med teleobjektiverne: De gengiver en lille synsvinkel, så distancen i billedet er stor i sammenligning med billedets dimensioner. Derfor vil man normalt betragte billedet fra en for lille afstand. I begge tilfælde er vi tilbage i teorien fra afsnit 9! I øvrigt bør det nævnes, at distancen i billedet nøje hænger sammen med objektivets brændvidde! Principperne omtalt ovenfor vedrørende objektivernes forskellige virkning kan illustreres gennem de tre fotos på figurerne 44, 45 og 46. Figur 43 indikerer, hvordan billederne er taget. Figurerne 44 og 45 viser billeder taget med henholdsvis et vidvinkelobjektiv med brændvidde ca. 28mm og med et teleobjektiv med brændvidde ca. 110 mm. Begge er taget fra det samme (fjerne) punkt A. Pointen er her, at da øjepunktet er fælles og synsretningen også er det, så vil perspektiverne være helt ens, blot vil billedet taget med teleobjektiv gengive en mindre del af billedet samtidigt med, at dets dimensioner er forstørret op, så det får samme størrelse som billedet på figur 44. Den del af sceneriet, som er med på telefotoet svarer til den del, som er indenfor den hvide ramme på vidvinkelfotoet. Bemærk, at figur 45 i al væsentlighed blot er en forstørret udgave af det, som er indenfor den hvide ramme. Figur 46 er taget med et vidvinkelobjektiv med brændvidde ca. 28 mm fra et nært liggende punkt B. Hvis man sammenligner billederne på figur 45 og 46 kan man tydeligt se den lidt ”flade” virkning telefotoet har, mens vidvinkelfotoet med dens kraftige forkortninger giver fornemmelse af en stor dybde i billedet.

Figur 43



Figur 44 (Foto taget med vidvinkelobjektiv fra fjernt punkt A)



Figur 45 (Foto taget med teleobjektiv fra fjernt punkt A)

Figur 46 (Foto taget med vidvinkelobjektiv fra nært punkt B)

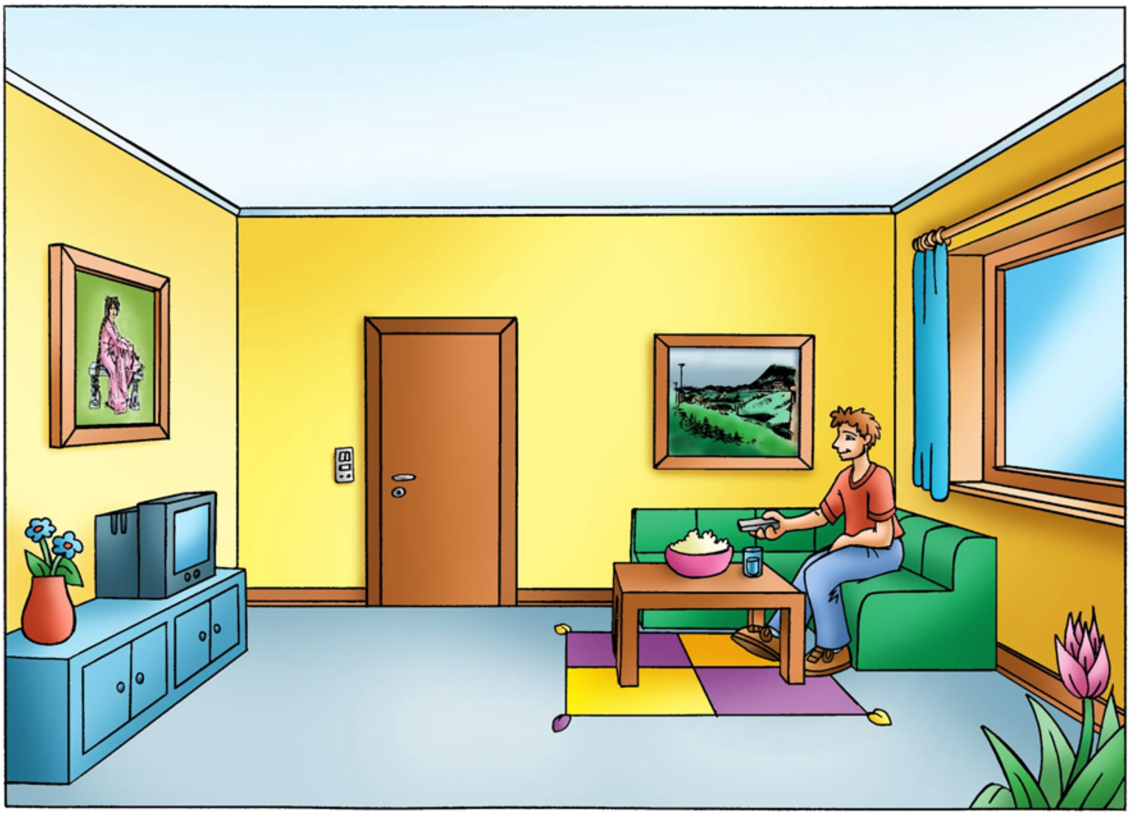
11. Eksempler på forskellige perspektiver

I dette afsnit skal vi se eksempler på færdige perspektivtegninger af forskellig art. Skitser til tegningerne er udført i Perspective Modeler og derefter tilføjet detaljer og farvelagt. Figur 47 viser et frontperspektiv af en stue, udført med lodret billedplan. På figur 50 er afbildet en skitse af tegningen, med linjer til forsvindingspunktet indtegnet. Det er oplagt, at en mængde linjer er parallelle med synsretningen, hvorfor de har hovedpunktet som forsvindingspunkt.

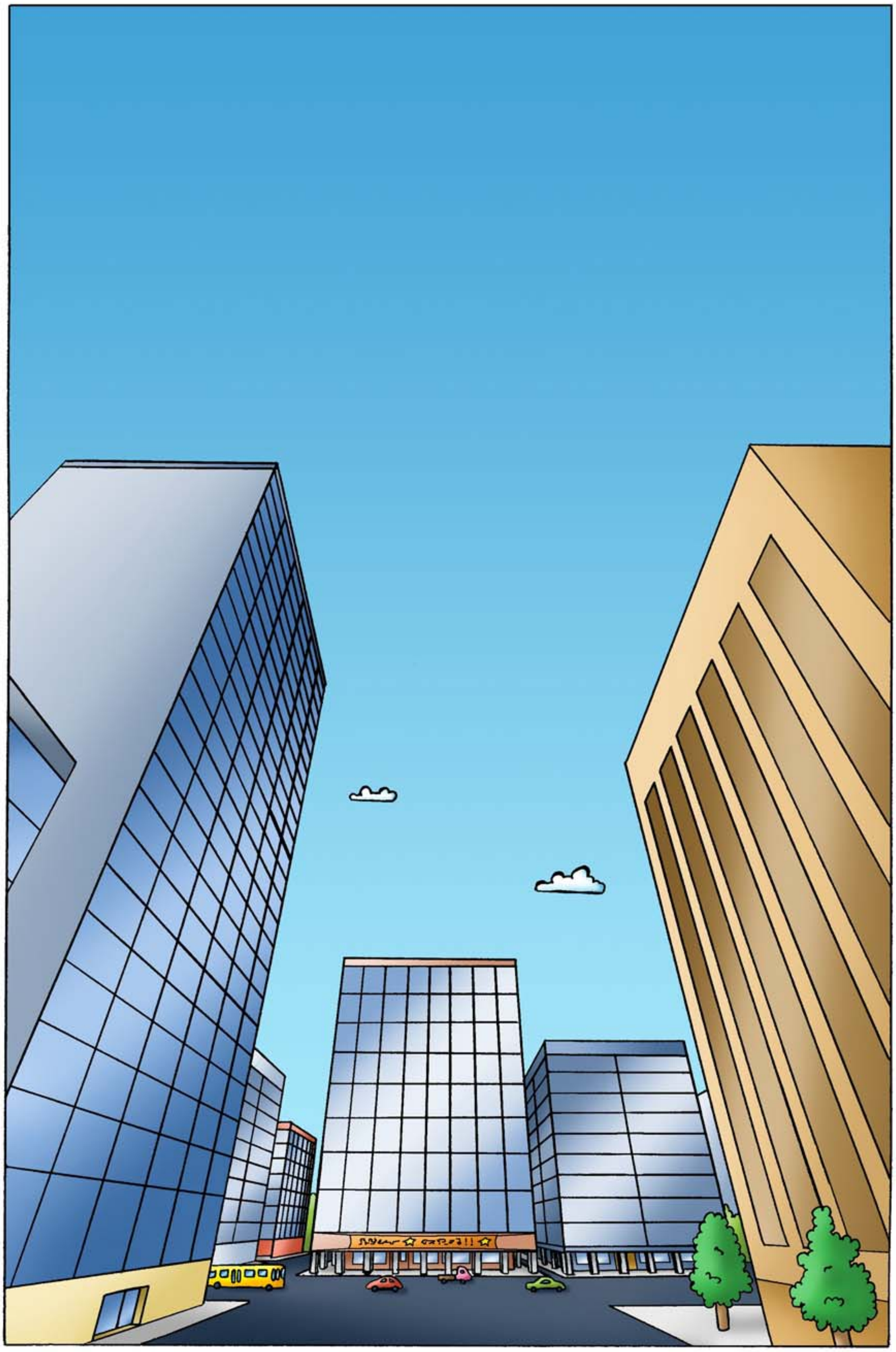
Figur 48 er et frøperspektiv af højhuse i en storby. Billedplanen er vippet opad, så synsretningen danner en vinkel på 26,6° i forhold til vandret. Det betyder, at også lodrette linjer får et forsvindingspunkt. Dette forsvindingspunkt, samt linjer dertil, er indtegnet på skitsen på figur 51. Desuden har de linjer, som i virkeligheden er vandrette og parallelle med synsretningen, et forsvindingspunkt nederst på bygningen i forgrunden, som det ses på figur 51. Synsfeltet i billedet er lovligt stort, men det giver samtidigt billedet en dramatisk virkning.

Figur 49 viser et boligområde set i fugleperspektiv. Billedplanen er vippet nedad, så synsretningen danner en vinkel på –44,7° i forhold til vandret. Vi har her at gøre med et såkaldt *3-punktsperspektiv*. Imidlertid ligger de tre forsvindingspunkter udenfor billedets ramme, hvilket er illustreret på skitsen på figur 52. Den lille ramme på skitsen viser billedets ramme.

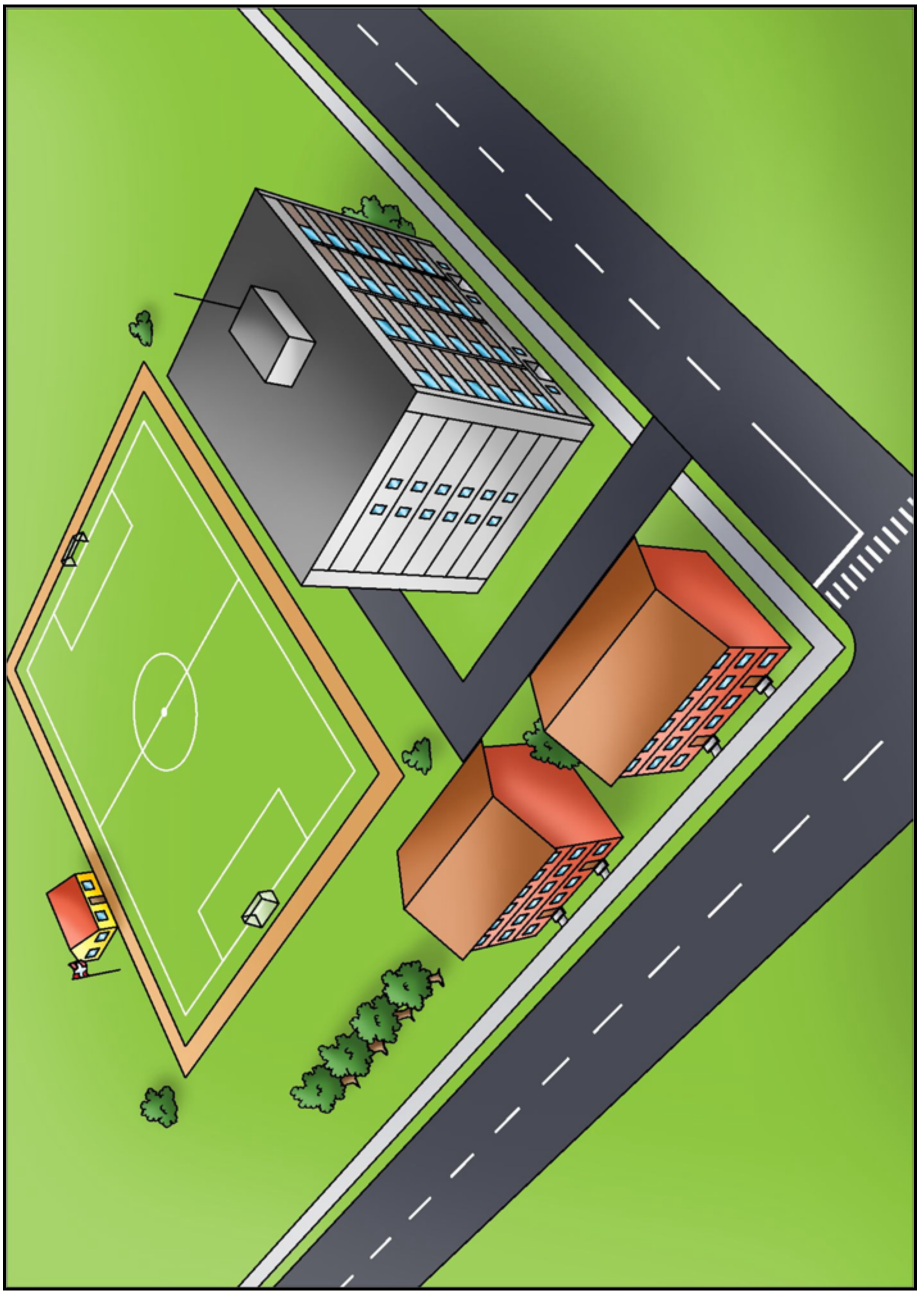
Figur 47 (Frontperspektiv)



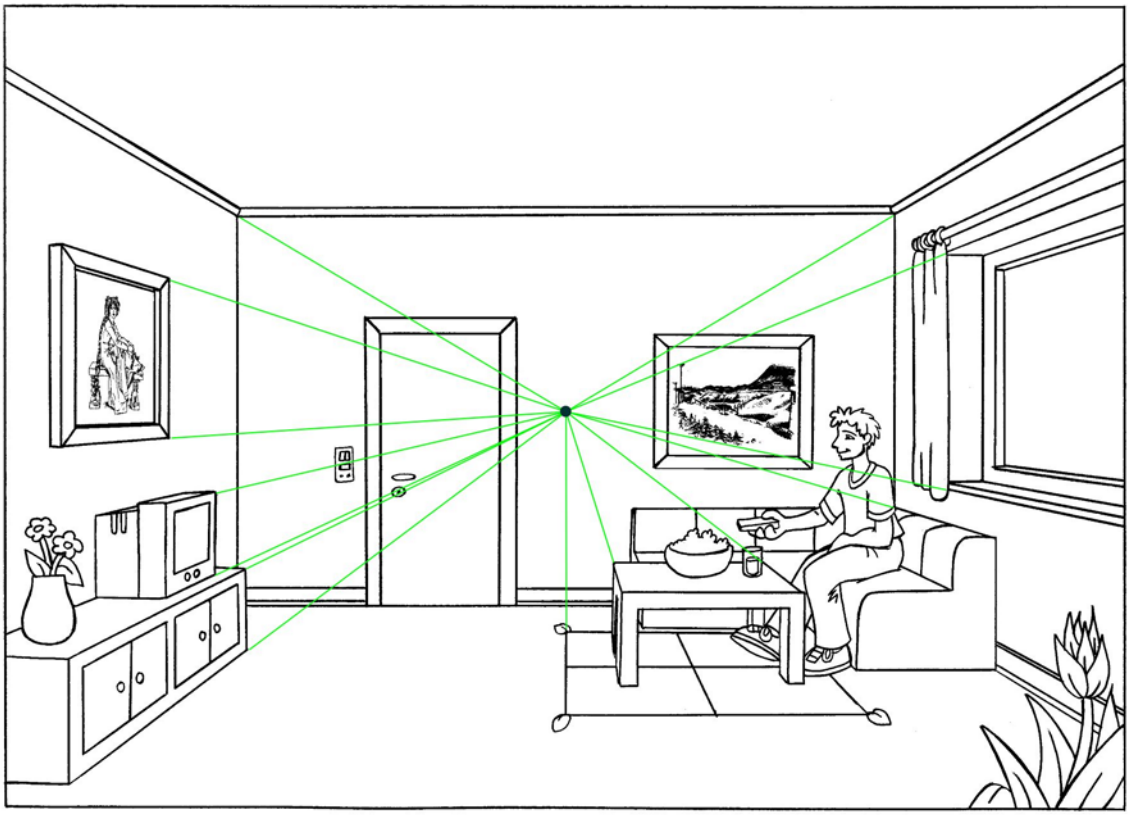
Figur 48 (Frøperspektiv)



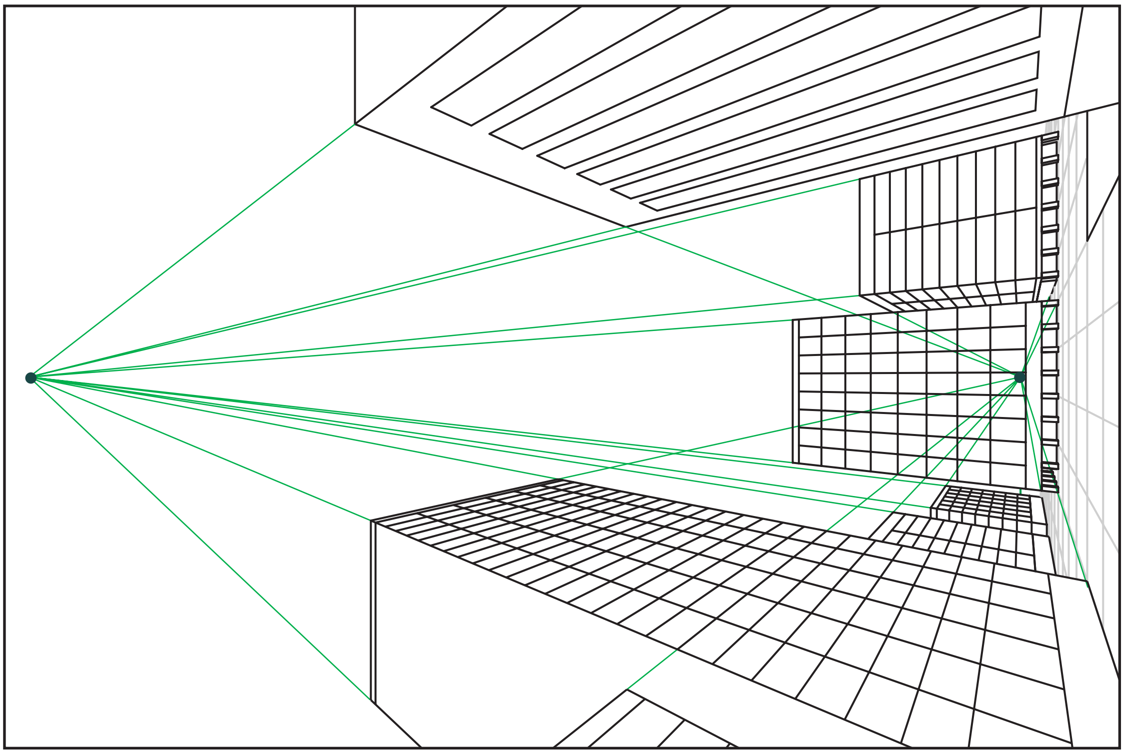
Figur 49 (Fugleperspektiv)



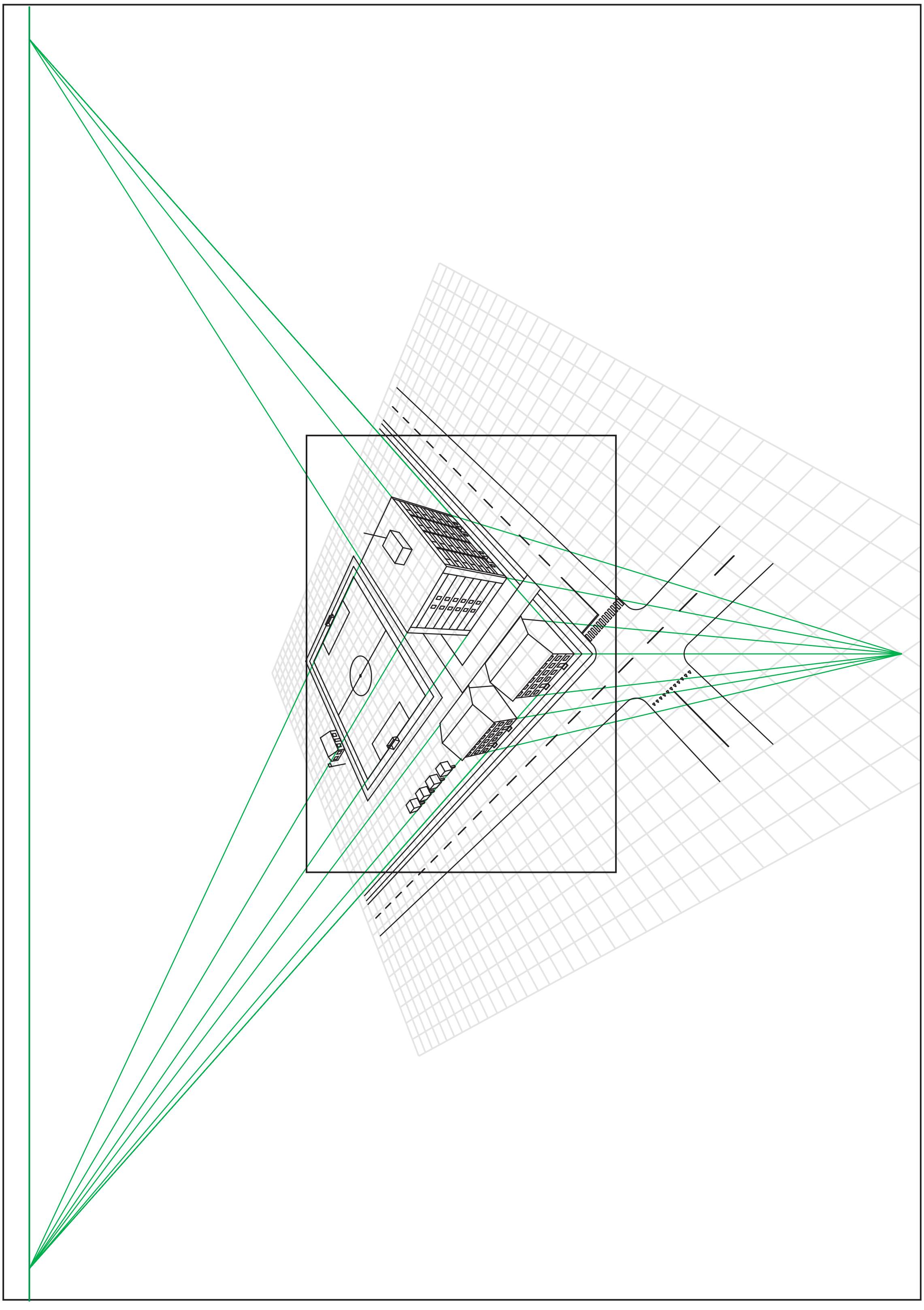
Figur 50



Figur 51



Figur 52



Appendiks A

I dette appendiks skal vi se et matematisk bevis for sætning 6b. Lad dybdelinjen ℓ have følgende parameterfremstilling, jvf. (3):

$$\ell: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + t \cdot v_1 \\ y_0 + t \cdot v_2 \\ z_0 + t \cdot v_3 \end{pmatrix}$$

Da der er tale om en dybdelinje må $v_2 \neq 0$. Vi kan endda antage, at $v_2 > 0$. Hvis v_2 skulle være negativ kunne vi bare gange retningsvektoren med –1 og vi ville have en ny retningsvektor med den ønskede egenskab! Hvis vi herefter lader *t* bevæge sig mod ∞ vil det tilhørende punkt på linjen bevæge sig ud af linjen, bort fra iagttageren, imod det uendelige. En mulig parameterfremstilling for linjen ℓ_0 er:

$$\ell_0: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \cdot v_1 \\ t \cdot v_2 \\ t \cdot v_2 \end{pmatrix}$$

da linjen skal gå igennem øjepunktet (= origo) og være parallel med ℓ. Sidstnævnte sikres ved a vælge samme retningsvektor. Linjen ℓ_0's skæringspunkt med billedplanen findes ved at sætte $t \cdot v_2 = d \;\Leftrightarrow\; t = d/v_2$ og indsætte denne værdi for *t* i parameterfremstillingen, hvilket giver følgende koordinater for F_ℓ i billedplanen:

$$F_\ell: \begin{pmatrix} d \cdot v_1 / v_2 \\ d \cdot v_3 / v_2 \end{pmatrix}$$

idet 2. koordinaten jo glemmes. Punktet *P* på linjen ℓ, svarende til parameterværdien *t*:

$$P: \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + t \cdot v_1 \\ y_0 + t \cdot v_2 \\ z_0 + t \cdot v_3 \end{pmatrix}$$

får ifølge sætning 3 et billedpunkt Q med følgende koordinater:

$$Q: \begin{pmatrix} x_Q \\ z_Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \cdot x_1 / y_1 \\ d \cdot z_1 / y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \cdot \left(\dfrac{x_0 + t \cdot v_1}{y_0 + t \cdot v_2} \right) \\ d \cdot \left(\dfrac{z_0 + t \cdot v_3}{y_0 + t \cdot v_2} \right) \end{pmatrix}$$

Men hvis vi lader $t \to \infty$ vil billedpunktet *Q* nærme sig til forsvindingspunktet, hvilket netop var hvad vi ønskede at vise:

$$\begin{pmatrix} d \cdot \left(\dfrac{x_0 + t \cdot v_1}{y_0 + t \cdot v_2} \right) \\ d \cdot \left(\dfrac{z_0 + t \cdot v_3}{y_0 + t \cdot v_2} \right) \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} d \cdot \dfrac{v_1}{v_2} \\ d \cdot \dfrac{v_3}{v_2} \end{pmatrix} \qquad \text{for } t \to \infty$$

□

Opgaver

Nedenstående opgaver er nummereret, så cifrene foran punktummet angiver det afsnit, som opgaven hører til. Opgave 3.5 er således opgave 5 til afsnit 3.

Opgave 2.1 (Transparent)

Fremskaf en kasse, en plastic transparent samt en permanent tusch. Kig på kassen igennem transparenten og prøv at tegne på den, så stregerne ser ud til at ligge oveni kassens omrids. Forsøg at holde transparanten lodret. Når du er færdig, mål da linjernes længder på transparanten for at vurdere forkortningerne. Observér, at forskellene er noget større end umiddelbart vurderet – hjernen genkender simpelthen, at der er tale om en genstand i perspektiv og ser ikke de aktuelle længder, som de fremstår på billedet, men tolker billedet!

Opgave 2.2 (Forsvindingspunkter)

Betragt definitionen for forsvindingspunktet i afsnit 2. Giv argumenter for hvorfor nedenstående påstande er korrekte.

a) Vandrette dybdelinjer har et forsvindingspunkt som ligger på horisonten.
b) En dybdelinje, som bevæger sig opad på vej ind i dybden har et forsvindingspunkt over horisonten.
c) En dybdelinje, som bevæger sig nedad på vej ind i dybden har et forsvindingspunkt under horisonten.

Opgave 2.3

Findes der vandrette dybdelinjer, som kan afbildes i en vandret linje i den perspektiviske plan? I så fald, hvad er betingelsen da?

Opgave 3.1

Bestem længderne af følgende vektorer:
a) $(4,-1,3)$ b) $(1,2,2)$ c) $(6,-2,13)$

Opgave 3.2

Givet vektorerne $\vec{u}=(2,1)$ og $\vec{v}=(3,-1)$ i planen. Indtegn vektorerne $\vec{u}, \vec{v}, 3\vec{u}$ og $2\vec{v}$ i et koordinatsystem samt benyt parallelogramreglen til at tegne $3\vec{u}+2\vec{v}$. Beregn dernæst koordinaterne til linearkombinationen $3\vec{u}+2\vec{v}$ og kontroller, at det stemmer med den vektor, du opnåede ved parallelogramreglen.

Opgave 3.3

Bestem en parameterfremstilling for den linje, som går igennem punkterne $P_1(1,2,-1)$ og $P_2(5,3,2)$. Bestem dernæst skæringspunktet mellem denne linje og planen med ligning $y=-2$.

Opgave 3.4

Givet linjen ℓ med parameterfremstillingen angivet nedenfor. Bestem skæringspunktet mellem denne linje og planen med ligning $y=2$. Samme spørgsmål for planen med ligning $y=21$.

$$\ell: \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Opgave 3.5

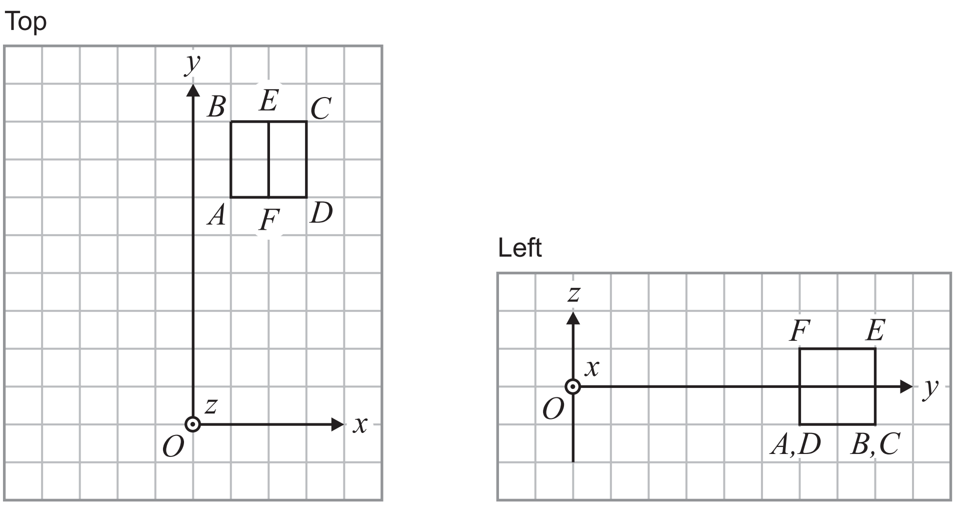
Bestem en parameterfremstilling for den linje, som går igennem punktet $P_1(10,2,1)$ og som er parallel med linjen med parameterfremstilling:

$$\ell: \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 14 \end{pmatrix}$$

Opgave 4.1 (Rumlige koordinater for telt)

Nedenstående figur viser plantegning og opstalttegning for en observatør, som med øjepunktet i O betragter et telt. Angiv de rumlige koordinater til hjørnerne A, B, C, D, E og F i teltet.

Figur 53



Opgave 5.1 (Beregning af billedpunkter)

Læseren antages at have løst opgave 4.1 med teltet. Indføj de rumlige koordinater for teltets hjørner i et skema som det i eksempel 4 på side 16. Beregn dernæst koordinaterne til hjørnernes billedpunkter ved hjælp af formlen i sætning 3, idet distancen skal være 0,20 m. Skriv resultaterne ind i skemaet. Afslut med at tegne det perspektiviske billede af teltet, ligesom det blev gjort for pyramiden på figur 17. Benyt for eksempel et kvadreret A4 ark.

Opgave 5.2 (Øjenhøjder)

Antag perspektiv med lodret billedplan. Bevis udfra formlen for billedpunktet i sætning 3, at følgende udsagn er sande:

i) Alle punkter, som ligger over øjenhøjde i rummet, skal tegnes over horisonten.

ii) Alle punkter, som ligger under øjenhøjde i rummet, skal tegnes under horisonten.

iii) Alle punkter, som er i øjenhøjde i rummet, skal tegnes på horisonten.

Opgave 6.1 (Tegn borde i perspektiv)

Dette er en opgave, hvor du ikke skal tegne en genstand efter bestemte mål, men blot benytte reglerne i sætning 5 og 6 fra afsnit 6. Billedplanen vælges lodret. Husk at anføre begrundelser for, hvorfor du tegner de enkelte linjer, som du gør!

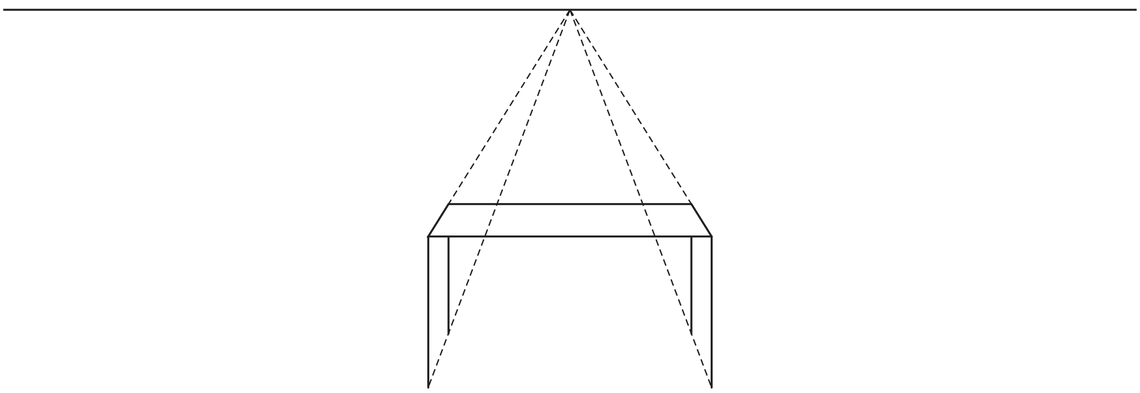
a) Lav en tegning af et bord i frontperspektiv, dvs. set lige forfra, ligesom på figur 54.

b) Tegn et simpelt bord i X-perspektiv, ligesom det, der er vist på figur 55.

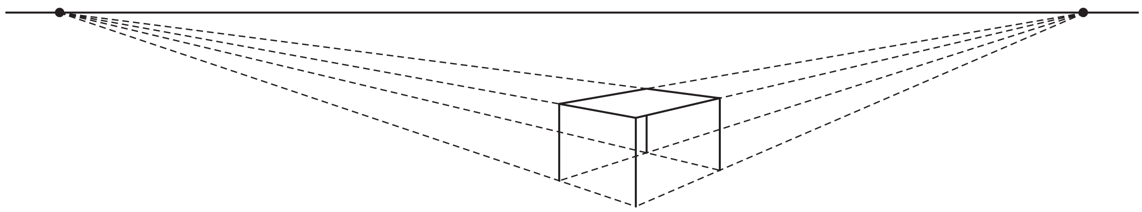
c) Forsøg at tegne et bord med flere detaljer, hvor benene og bordpladen har en tykkelse etc. lidt i stil med det på figur 56. Bordet på figur 56 er afbildet så stort, at forsvindingspunkterne ikke kan være på figuren.

d) Overvej hvordan bordene i a) og b) skal tegnes, hvis øjenhøjden er lavere end bordpladens højde.

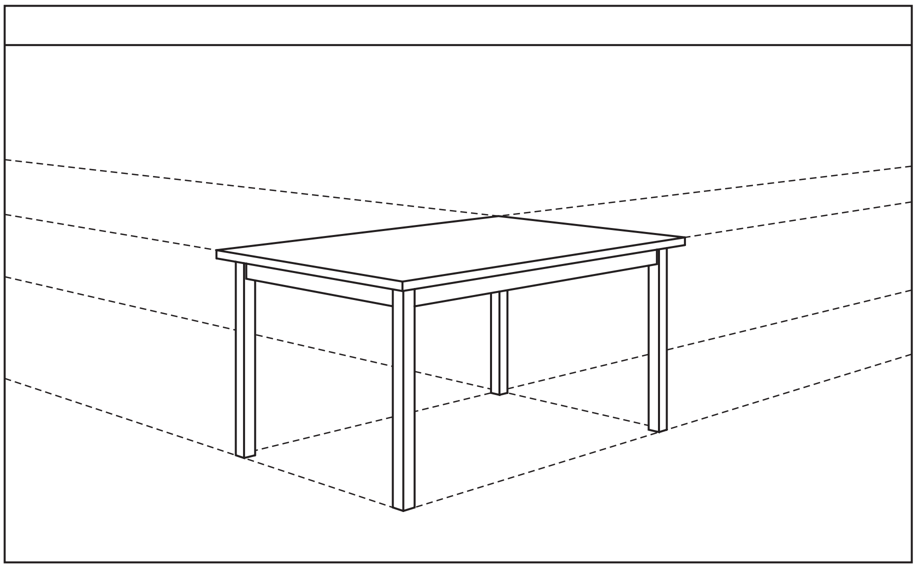
Figur 54



Figur 55



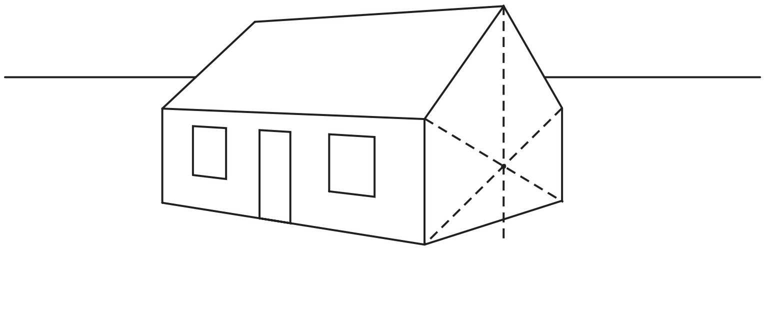
Figur 56



Opgave 6.2 (Husgavl)

Når man skal tegne et hus med gavl i X-perspektiv, så er et af problemerne at bestemme toppunktet i gavlen, så det svarer til et objektpunkt, som i virkeligheden ligger midt mellem de to sider af huset. Blandt tegnere er det en velkendt teknik at tegne de to diagonaler mellem siderne, som illustreret med stiplede linjer på figur 57 og tegne en lodret linje gennem deres skæringspunkt, hvorefter toppunktet skal ligge et sted på denne lodrette linje. Forklar ved hjælp af sætning 5 hvorfor denne metode er korrekt? I denne opgave antages lodret billedplan.

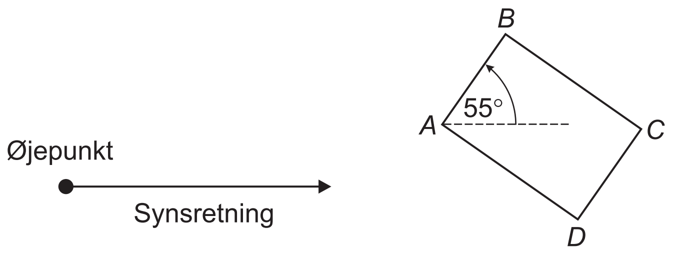
Figur 57



Opgave 6.3 (Beregn forsvindingspunkter)

Figur 58 nedenfor viser en plantegning af en rektangulær kasse, som står på en vandret flade. Øjepunktet samt synsretningen er angivet. Kassen er drejet en vinkel på 55° i forhold til synsretningen. Da linjestykkerne *AB*, *BC*, *CD* og *AD* alle er vandrette ligger deres forsvindingspunkter alle på horisonten. Benyt sætning 6d) til at bestemme, hvor langt fra hovedpunktet de ligger. Det oplyses, at distancen i billedet er 0,5 m.

Figur 58

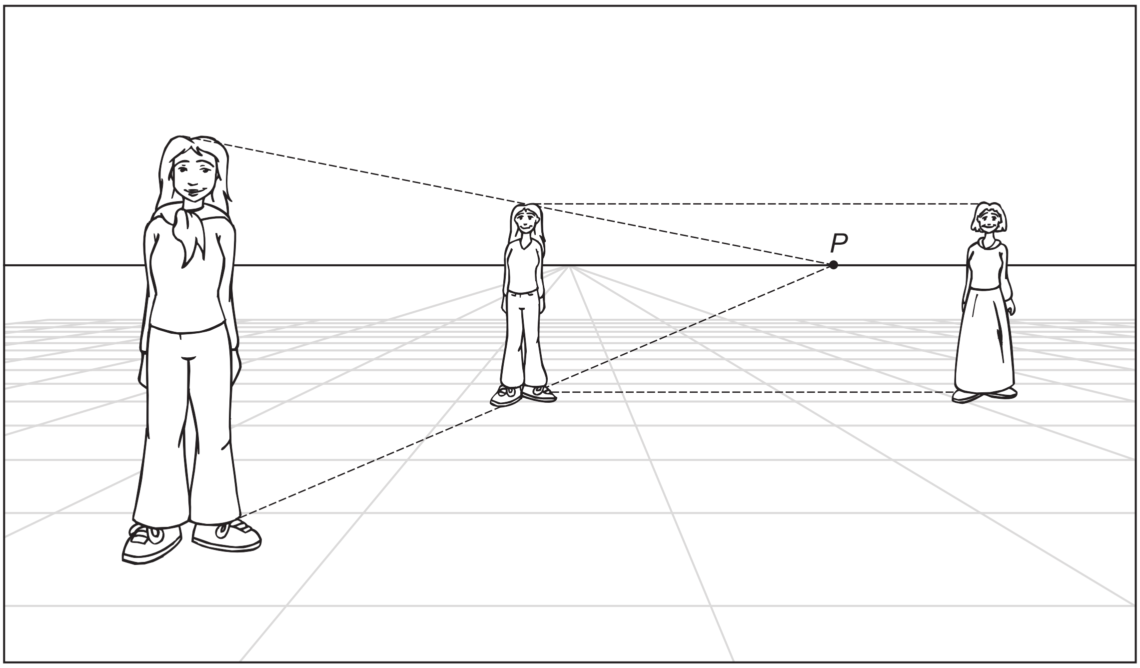


Opgave 6.4 (Højder)

Figur 59 viser tre personer, som alle i virkeligheden er lige høje. Besvar nedenstående spørgsmål via sætning 5 og 6. Sørg for at holde adskilt, hvordan tingene tager sig ud i rummet og hvordan de fremstår i den perspektiviske plan. Lodret billedplan antages.

a) Hvad kan pointen i tegningen være?
b) Hvor stor er observatørens øjenhøjde sammenlignet med personernes øjenhøjde?
c) Står pigerne til venstre eller højre for observatøren?
c) Hvordan ville billedet af pigerne se ud, hvis observatøren blev hejst op i en kran?

Figur 59



Opgave 6.5

Figur 60 viser et foto fra en gade i København. Besvar nedenstående spørgsmål, idet du argumenterer ved hjælp af sætning 5 og 6.

a) Hvad er observatørens øjenhøjde? Sammenlign med steder på muren til højre. *Hjælp*: Studer linjeforløb i muren.

b) Kan du give et rimeligt godt argument for, hvorfor observatørens synsretning er parallel med fliserækken, sådan omtrent?

c) Hvor langt ude på fortovet står observatøren?

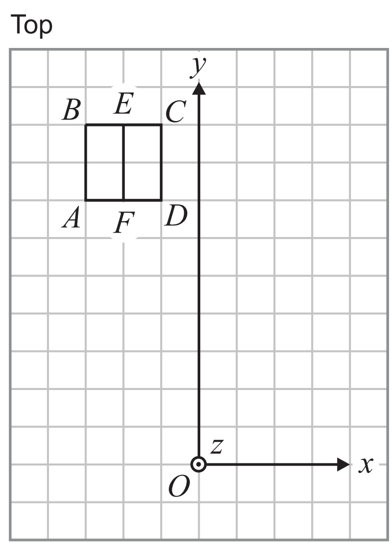
d) Der er to porte med buer i bygningerne til højre. Er portene er i virkeligheden lige høje?

Figur 60

Opgave 8.1 (Telt)

Figur 61 viser plantegningen af et telt. Det oplyses endvidere, at bunden *ABCD* befinder sig på jorden med *z*-koordinat 0, mens ”overliggeren” *EF* befinder sig i højden svarende til $z = 2$, med enheden meter. Hvert tern i plantegningen svarer til 1 gange 1 meter. Dette fastlægger fuldstændigt teltets placering i rummet! I det følgende skal du bruge Perspective Modeler til at fremstille teltet, men først skal du lige have udregnet de rumlige koordinater i delspørgsmål a).

Figur 61 og 62



Rumkoordinater

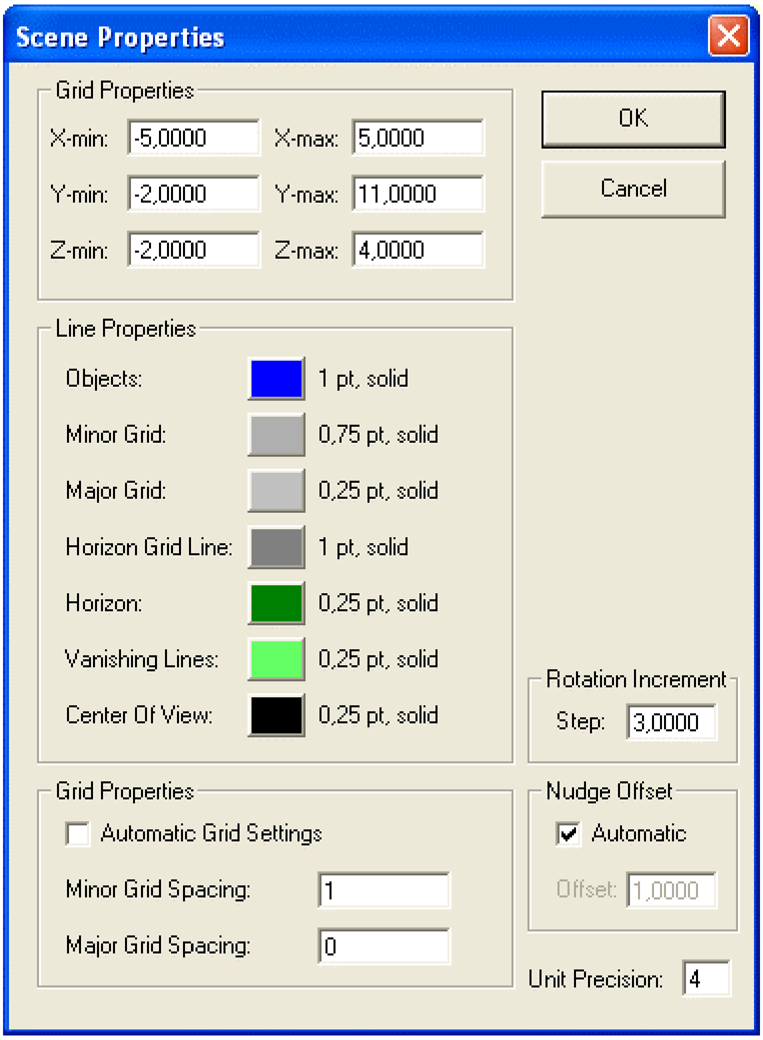
	x	y	z
A			
B			
C			
D			
E			
F			

a) Bestem udfra oplysningerne ovenfor de rumlige koordinater for hvert af de seks hjørner *A*, *B*, *C*, *D*, *E* og *F* i teltet. Skriv dem i et skema som det på figur 62.

b) Du skal nu frembringe teltet i Perspective Modeler. Åben programmet og marker huset og slet det via delete-tasten.

c) Du skal nu sætte en fornuftig scene op. Vælg *View > Scene Properties...* og indtast de grænser for *x*, *y* og *z*, som du ser på figur 63. Fjern afmærkningen i feltet *Automatic Grid Settings* og sæt den underordnede gitterafstand til 1, som vist på figur 63. Et 0 i feltet for overordnet gitterafstand vil fjerne det overordnede gitter. Hvis du har lyst, kan du redigere i *Line Properties* for at få andre linjetykkelser eller farver. Det er dog ikke hovedpointen her. Afslut med OK.

Figur 63

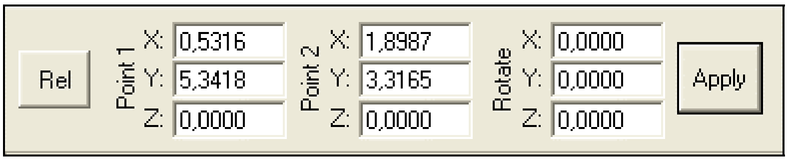


d) Brug genvejen Ctrl+R for at vise linealer (Rulers), så du bedre kan se koordinater.

e) Du er nu klar til at frembringe teltet. Start med at aktivere feltet *Top* for at lave den rektangulære bund, dvs. $\square ABCD$. Efter at have valgt rektangel-værktøjet skal du trække et kvadrat på 2×2 ud på det sted, som fremgår af figur 61. Sørg for at holde Shift-tasten nede mens du gør det, så rektanglet holder sig pænt til gitteret.

f) Linjestykkerne *AF*, *FD*, *BE*, *EC* og *EF* mangler at blive skabt. Hvert af disse linjestykker kan du frembringe på følgende måde: Vælg linje-værktøjet i værktøjslinjen og træk på vilkårlig vis en linje ud i feltet *Top*. På bjælken nederst til venstre kan du se koordinaterne til linjestykkets to endepunkter Point 1 og Point 2, som vist på figur 64.

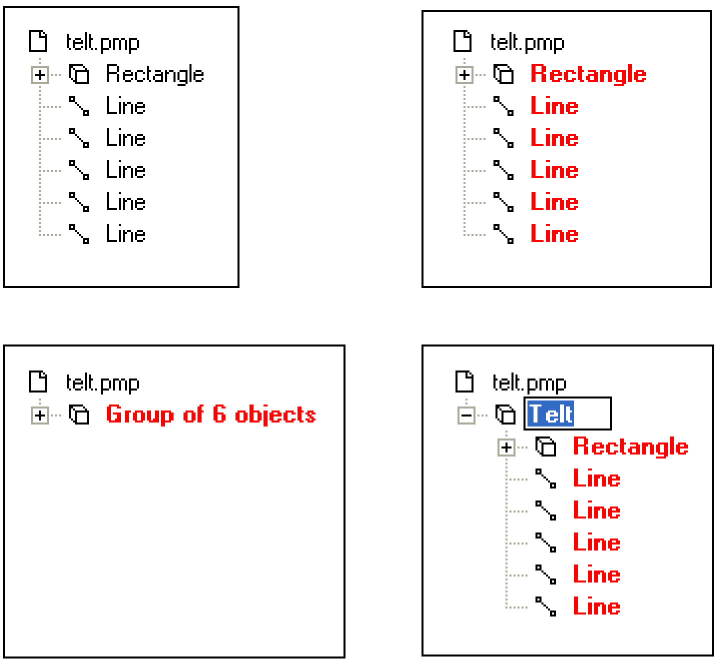
Figur 64



Rediger nu koordinaterne, så de svarer til endepunkterne for det linjestykke, du ønsker at lave: Kig i den tabel 62, du har udfyldt! Husk at klikke på *Apply* for at gennemføre redigeringen! Gentag processen for hvert enkelt linjestykke. Når du har redigeret en linje, kan du ofte med fordel kopiere den med Ctrl+D, mens den er markeret, og så rette nogle få koordinater til. Symmetrien gør, at der spares tid!

g) Nu skal du *gruppere* enkeltdelene i teltet, så teltet nemt kan behandles under et: Klik på Rektanglet og linjerne et efter ét i *Object Manager*'en ovre til højre, mens du holder Shift-tasten nede. Når alle objekter er markeret med rødt som på figur 66, bruger du genvejen Ctrl+G for at gruppere, hvorefter situationen fra figur 67 opstår. Det kan være fornuftigt at omdøbe det grupperede objekt til Telt, hvilket kan ske ved at klikke nogle få gange på objektet, indtil et felt popper op, hvori man kan skrive ... ligesom på figur 68. Skriv for eksempel ”Telt”.

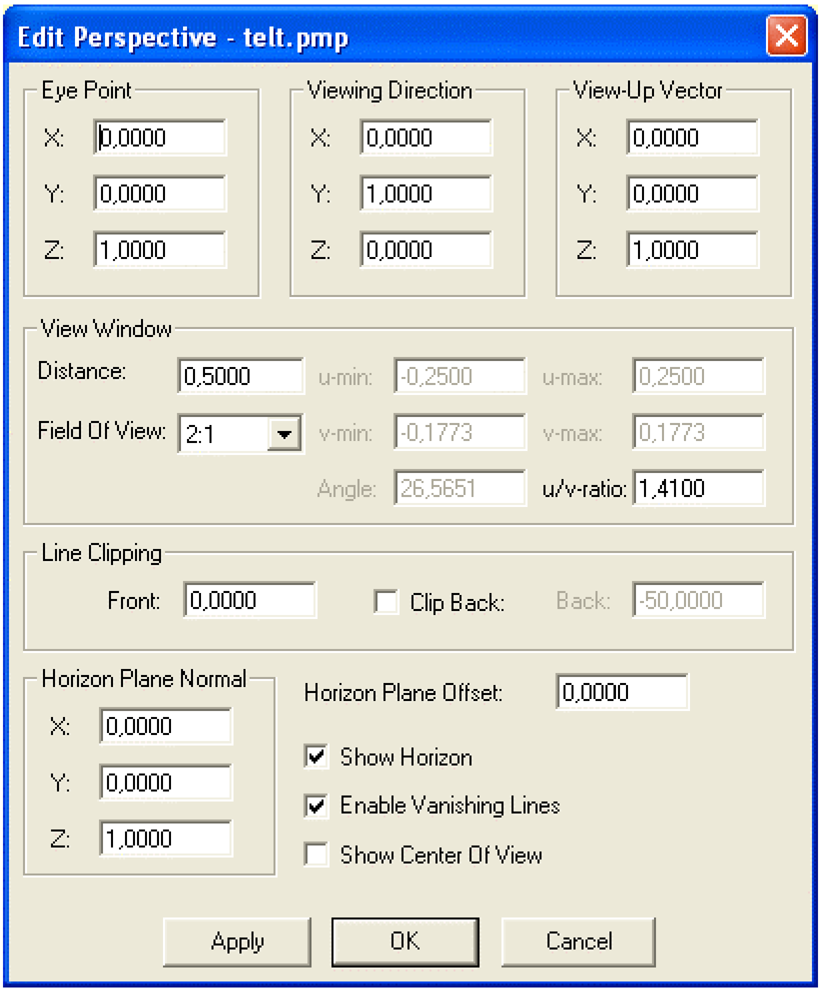
Figur 65, *66*, *67* og *68*



h) Gem lige filen under navnet ”Telt” via *File* > *Save As...*, således at filen får navnet Telt.pmp.

i) Nu mangler vi bare at fortælle, hvordan teltet skal betragtes og billedplanen anbringes. Hertil vælg menuen *View* > *Edit Perspective...* eller klik blot på øjet i værktøjslinjen. Indtast øjepunktet $(0,0,1)$ og synsretningen $(0,1,0)$ som på figur 69.

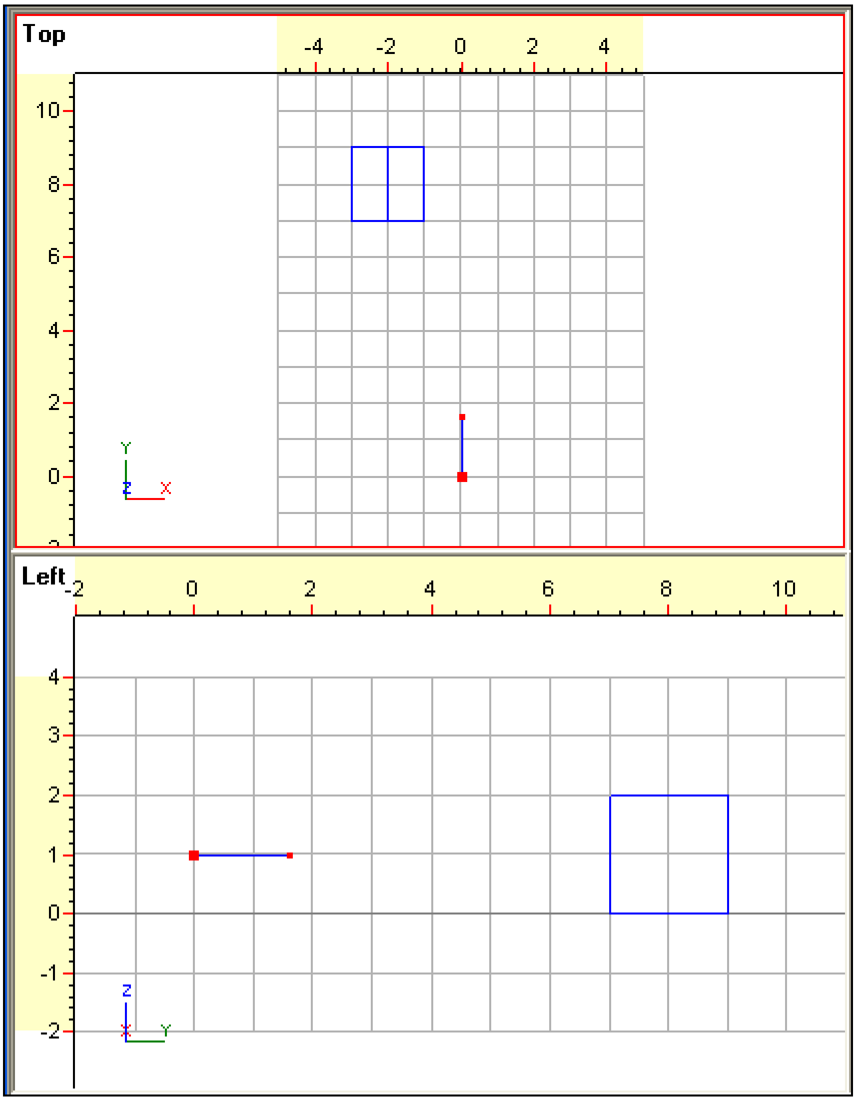
Figur 69



Herefter skulle felterne *Top* og *Left* gerne se ud som på figur 70 på næste side. Slut af med at gemme filen.

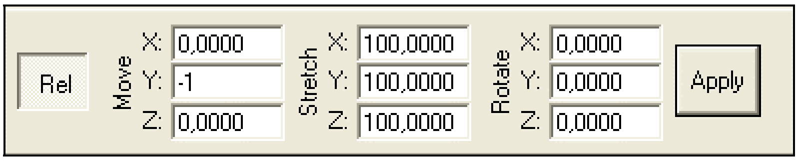
j) Du skal nu skrive det perspektiviske billede af teltet ud. Det er her fornuftigt først at se, hvordan det kommer til at se ud *før* du giver ordre til at skrive ud. Vælg derfor menuen *File* > *Print Preview...*. Måske kommer der en dialogboks med *Indstil printer* op. Hvis der gør det, sørg da for, at det er den rigtige printer, som er valgt og tryk herefter på OK. Herefter skal du gerne se dialogboksen *Print Preview*. I drop-down-menuen *View* vælges *Perspective*, så det er dette felt, du får vist. Sørg for, at *Fit View To Page*, *Add Frame* og *Show Grid* er afmærket og klik på *Print* knappen.

Figur 70



k) Vi skal nu se, hvad der sker med det perspektiviske billede, når vi flytter teltet 1 meter tættere på øjepunktet (i dybden). Bemærk, at der i feltet *Top* på figur 70, nede til venstre er en lille markering af, hvordan akserne vender, og i hvilken retning de peger! Vi ser, at y-aksen er parallel med synsretningen, så vi kan reducere dybden med 1 meter ved at flytte teltet med –1 i y-aksens retning. Vi har her gavn af at teltet er et grupperet objekt, idet vi da bare kan markere teltet med et enkelt klik med pegeværktøjet. Når objektet er markeret med rødt klikkes på *Rel* knappen i databjælken forneden. Skriv –1 som y-koordinat udfor *Move* og afslut med *Apply*:

Figur 71



NB! Man kan også flytte det markerede objekt med piletasterne i felterne *Top*, *Left* og *Front* med skridt, som er specificeret i *Scene Properties* dialogboksen (F6) under *Nudge Offset*. Default-værdien er lig med maskevidden i det sekundære gitter.

l) Flyt herefter teltet til højre med 3 meter, dvs. forøg x med 3 på samme måde som under spørgsmål k).

m) Vi ønsker nu at flytte øjepunktet hen i (0,1,3) og lade synsretningen forløbe lidt nedad, så vi får et fugleperspektiv af teltet: Åben dialogboksen *Edit Perspective* ved i værktøjslinjen at klikke på knappen med øjet og sørg for at ændre *Eye Point* til $x = 0,\ y = 1,$ og $z = 3$ og *View Direction* til $x = 0,\ y = 1,$ og $z = -0,4$.

n) Vi skal nu se på, hvordan man kan indsætte det perspektiviske billede i et Word-dokument. Hertil skal vi først eksportere til *emf*-format (Windows-Enhanced-Meta-file). Da der ikke her er nogen dialogboks til at styre dette, skal du først aktivere det felt, som du ønsker eksporteret: Det er her feltet *Perspective*. Vælg dernæst menuen *File* > *Export...* (Ctrl+E). I den fremkomne dialogboks skal du fortælle, hvad filen skal hedde og hvor den skal gemmes. Du kan fint vælge at godtage navnet *telt (Perspective).emf*, som foreslået af programmet. Husk at gemme filen i en fornuftig mappe, du kender, på din harddisk! Nu skal billedet indsættes i Word. Åben først et Word-dokument og vælg menuen *Indsæt* > *Billede* > *Fra fil...*. Lokaliser emf-filen i den mappe, du gemte den i, marker filen og klik på *Indsæt*. Herefter har du en Word-fil med det perspektiviske billede. Prøv at skrive det ud!

Bemærkning

NB! Emf-formatet er et såkaldt vektorgrafik-format, som kan håndteres af programmer som *Adobe Illustrator* og *CorelDRAW*. Men hvis et billede er indsat i Word, som beskrevet under punkt n) ovenfor, så kan du også redigere billedet direkte i Word ved at højreklikke på billedet og vælge *Rediger Billede...*:

Så fremkommer der i Word nogle faciliteter til at redigere billedet, herunder slette dele af billedet, ændre farver, linjetykkelser, forkorte/forlænge, flytte linjer etc. Du kan også indsætte billedfiler i emf-format i Microsoft Powerpoint, og her er lignende redigeringsmuligheder til rådighed. God fornøjelse med at eksperimentere!

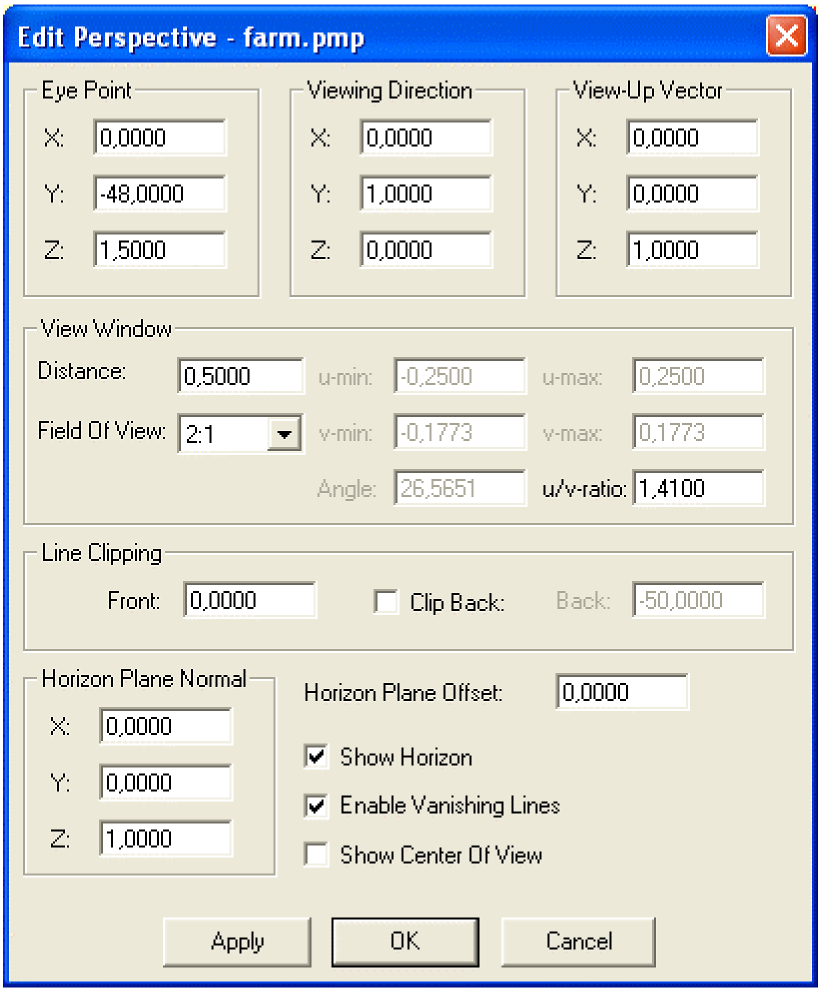
Opgave 8.2 (Bondegård)

I denne opgave skal vi betragte en bondegård fra forskellige positioner. Hvis du har valgt default-installationen, da du installerede *Perspective Modeler*, så er der i mappen *Programmer* blevet dannet en mappe med navnet *PerspModeler*. I en undermappe hertil, kaldet *Samples*, kan du finde en række færdige filer, fremstillet i programmet.

a) Gå ind i mappen *Samples* og åben den fil, som hedder *farm.pmp*.

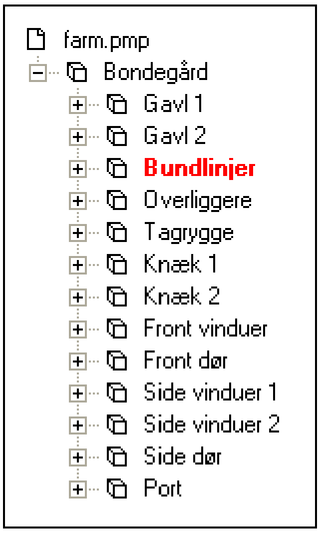
b) Lad os kigge på bondegården i frontperspektiv: Åben dialogboksen *Edit Perspective* ved at klikke på knappen med øjet i værktøjslinjen. Foretag de ændringer i *Eye Point* og *Viewing Direction* samt *Field Of View*, som fremgår af figur 72.

Figur 72



c) Vi skal nu have tegnet linjer til forsvindingspunkterne. En måde at gøre det på er ved at markere hele det grupperede objekt *Bondegård* i *Object Manageren* og vælge menuen *Object* > *Show Vanishing Lines* (F5). Imidlertid bliver der så tegnet linjer til forsvindingspunkterne for alle linjer i objektet, og det kan godt virke lidt overvældende. Derfor kan det være fornuftigt at vælge enkelte linjer ud i objektet og tegne linjer til deres forsvindingspunkter. Ekspander objektet bondegård i Object Manageren ved at klikke på plus-tegnet. Marker herefter delobjektet *Bundlinjer*, som gjort på figur 73 og tryk F5-tasten. Gentag det samme med delobjektet *Tagrygge* og *Overliggere*. Nu vises et passende antal linjer til forsvindingspunkterne.

Figur 73

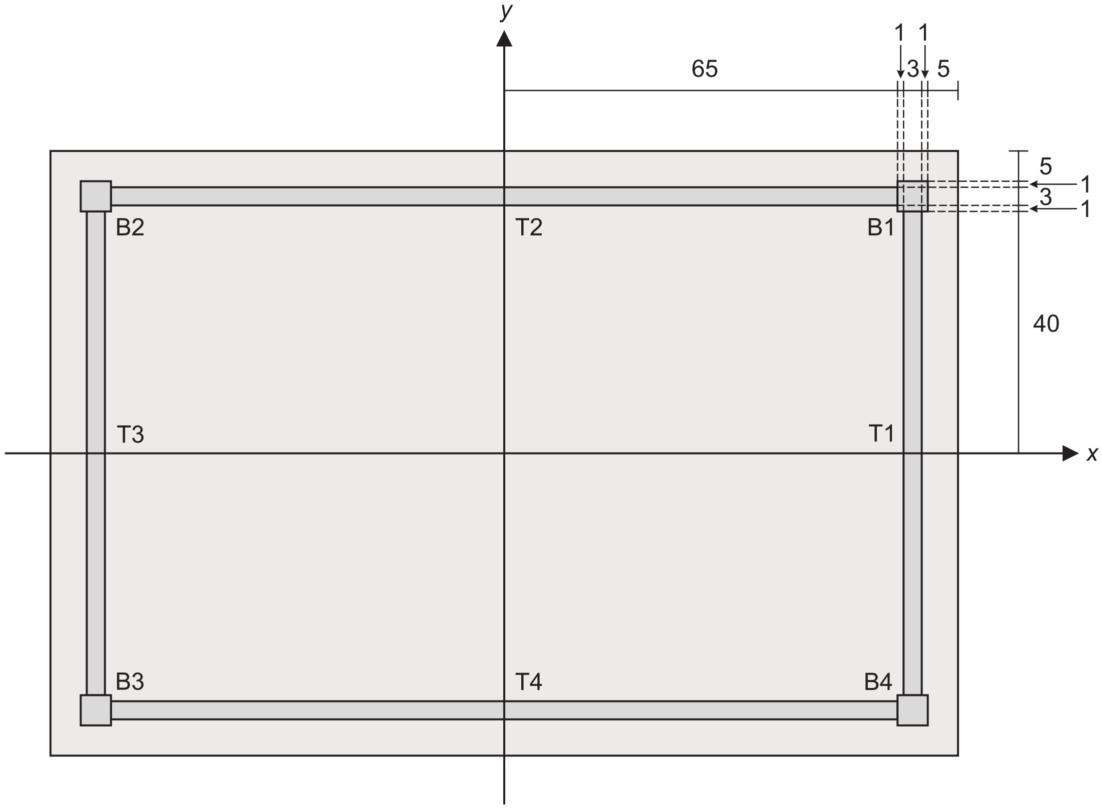


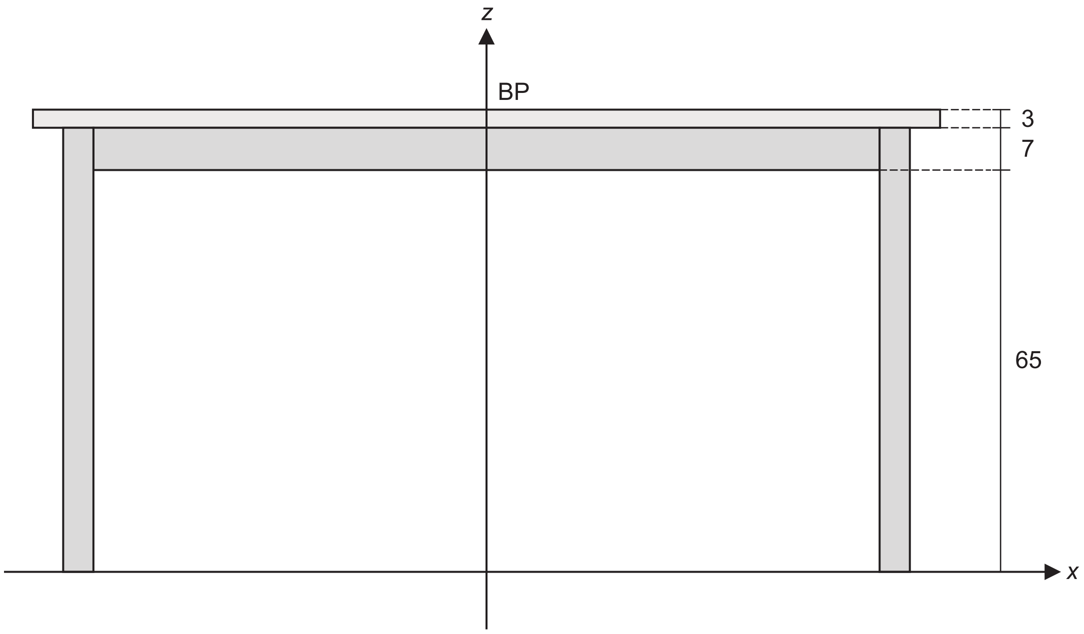
d) Observer hvordan det perspektiviske billede ser ud. I det følgende skal du skrive billedet ud ved først at vælge *File > Print Preview...* Måske kommer der en *Indstil Printer* dialogboks fra Windows frem. Vælg da at have papiret vendt "liggende". Herefter kommer du ind i *Print Preview* dialogboksen. Sørg for, at *Fit View To Page* og *Add Frame* er afmærket, mens *Show Grid* ikke skal være afmærket. Det perspektiviske billede skulle gerne vises i dialogboksen. Hvis ikke, vælg da i drop-down menuen *View* muligheden *Perspective*. Afslut med OK.
e) Vinduerne i gårdlængerne i siden har i virkeligheden samme størrelse som vinduerne i stuehuset lige foran. Bemærk forkortningerne af vinduerne i siden! Forklar ved hjælp af sætningerne i afsnit 6, hvorfor vinduerne i stuehuset forude alle er afbildet med samme størrelse?
f) Sørg nu for at hæve øjepunktet til 15 meters højde i *Edit Perspective* dialogboksen og skriv også dette billede ud. Hvad observerer du?
g) Gentag punkt f) med en øjenhøjde på 0 meter.
h) Eksperimenter lidt på egen hånd, for eksempel hvor du kigger skråt ind på gården.

Opgave 8.3 (Detaljeret bord)

I opgave 6.1 så vi på perspektiviske billeder af borde, blandt andet det "avancerede" bord på figur 56. I denne opgave skal vi se, hvordan vi kan frembringe et sådant bord i Perspective Modeler. Bordet er på figur 74 beskrevet med en plantegning og en opstalttegning med angivelse af mål i cm. Bordet består af ni dele: 4 bordben (B1, B2, B3, B4), 4 tværbjælker (T1, T2, T3, T4) samt en bordplade (BP). Disse ni dele er i øvrige alle kasser, som kan frembringes med *Box Tool* i Perspective Modeler! I programmet er en kasse beskrevet ved koordinaterne til dets centrum (*Position*) og ved kassens dimensioner i de tre retninger (*Size*).

Figur 74





Bemærk, at vi på tegningerne på figur 74 har lagt koordinatsystemet, så det har begyndelsespunkt på jorden, lodret under bordets centrum. Det er fornuftigt, for så bliver det nemmere at bestemme koordinater, idet man så kan udnytte symmetrier! Man kan altid senere nemt flytte bordet til an anden position, hvis dette måtte ønskes!

Det er fornuftigt at lave et skema, hvori man skriver data for hver af de ni kasser: se figur 75. Lad os for eksempel se på bordben B1. Plantegningen fortæller os, at B1's centrum har *x*-koordinat $65+1+\frac{1}{2}\cdot 3=67,5$, mens $40+1+\frac{1}{2}\cdot 3=42,5$ er *y*-koordinaten. Af opstalttegningen fås *z*-koordinaten til $\frac{1}{2}\cdot(65+7)=36$. Da vi har valgt at regne i meter i Perspective Modeler, så fås hermed følgende koordinatsæt for bordbenets centrum: $(x,y,z)=(0,675;\,0,425;\,0,360)$, som indføjet i skemaet. Bordbenets dimensioner i *x*-, *y*- og *z*-retningen ses klart at være 5 cm, 5 cm og 72 cm. Det giver i meter de i skemaet indskrevne værdier for *Size*.

Figur 75

	Position (centrum)			Size		
	x	y	z	x	y	z
B1	0,675	0,425	0,360	0,050	0,050	0,720
B2						
B3						
B4						
T1						
T2						
T3						
T4						
BP						

a) Udfyld de resterende koordinater i skemaet på figur 75. Du kan her kraftigt udnytte symmetrierne!

b) Vi er nu klar til konstruere bordet i Perspective Modeler. Åben programmet og slet huset. Det næste, vi skal, er at vælge en passende scene. Vælg menuen *View > Scene Properties...* (F6) og sæt *x*-grænserne til –3 og 3, *y*-grænserne til –2 og 7 og *z*-grænserne til –5 og 5. Under *Grid Properties* fjerner du afmærkningen i feltet *Automatic Grid Settings* og sætter *Minor Grid Spacing* til 0,5 og *Major Grid Spacing* til 0. Sidstnævnte vil fjerne de primære gitterlinjer. Afslut med OK. Klik lige på *Reset Eye Point* knappen i værktøjslinjen, så øjet kommer inden for scenen igen!

c) Aktiver feltet *Top*. Vælg *Box Tool* (ikke *Rectangle Tool*!!) i værktøjslinjen og træk en kasse ud et eller andet sted og med en eller anden størrelse. Vi vil alligevel rette kassen til i næste punkt!

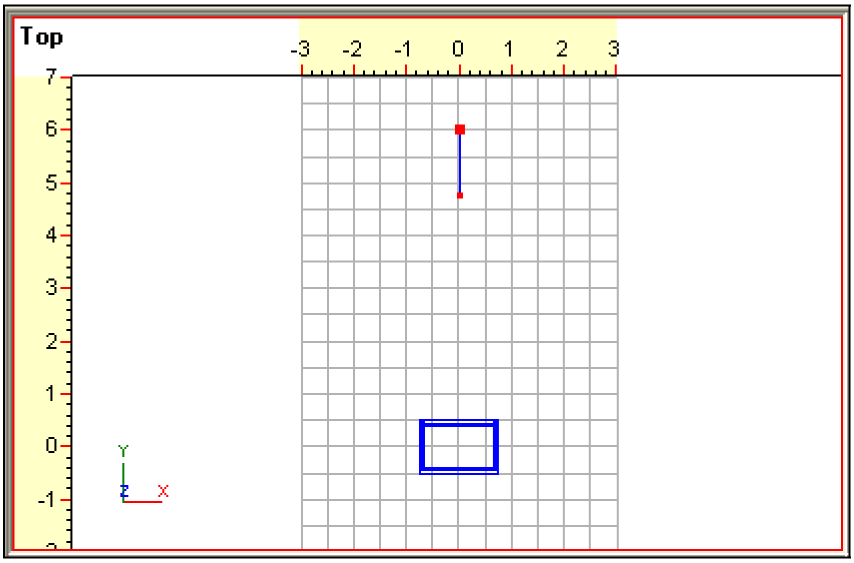
d) Sørg for at kassen er markeret. Kig på bjælken nede til venstre. Her skal *Rel*-knappen være oppe, dvs. *ikke* trykket ned, således at de absolutte data for den markerede kasse vises. Indtast nu de værdier, som står i skemaet i figur 75 for B1. Afslut med at klikke på *Apply*.

e) Træk en ny kasse ud og gentag proceduren fra punkt d) for de resterende otte objekter i skemaet. Det kan også være fornuftigt blot at duplikere den kasse, du allerede har lavet ved hjælp af *Object > Duplicate* (Ctrl+D). Derved skabes en identisk udgave oveni den oprindelige. I *Object Manageren* kan du se den nye! Du kan hurtigt ændre de absolutte data for den nye. Ofte er det blot enkelte tal, som skal ændres på grund af symmetrien.

f) Marker, mens du holder Shift-tasten nede, alle de ni kasser i *Object Manageren*. Når alle objekterne er markeret med rødt vælges menuen *Object > Group* (Ctrl+G). Derved er alle ni objekter grupperet til et objekt, som automatisk får navnet *Group of 9 Objects*. Eventuelt kan du klikke et par gange eller tre på navnet, så det bliver muligt at omdøbe objektet til for eksempel ”Bord”.

g) Vi skal se på bordet i front-perspektiv og skal derfor have indstillet øjet. Åben *Edit Perspective* dialogboksen via *View > Edit Perspective...*. Sæt øjepunktets koordinater til $(0;6;1,7)$ og synsretningen til $(0,-1,0)$. Så skulle situationen gerne se ud som på figur 76 nedenfor.

Figur 76



h) Marker bordet og vælg menuen *Object > Show Vanishing Lines* (F5) for at få tegnet linjer til forsvindingspunkter. Hvilket forsvindingspunkt er der tale om?

i) Marker bordet og roter det med vinklen 45° omkring en lodret akse ved at indtaste værdien 45 i *z*-koordinaten til *Rotate* i databjælken nede til venstre. Benyt absolutte data, så *Rel*-knappen skal være oppe! Hvordan ser det perspektiviske billede ud? Kommenter det! Prøv at skrive billedet ud uden gitterlinjer via menuen *File > Print Preview...*. Husk i dialogboksen at vælge *Perspective* i dropdown menuen *View*.

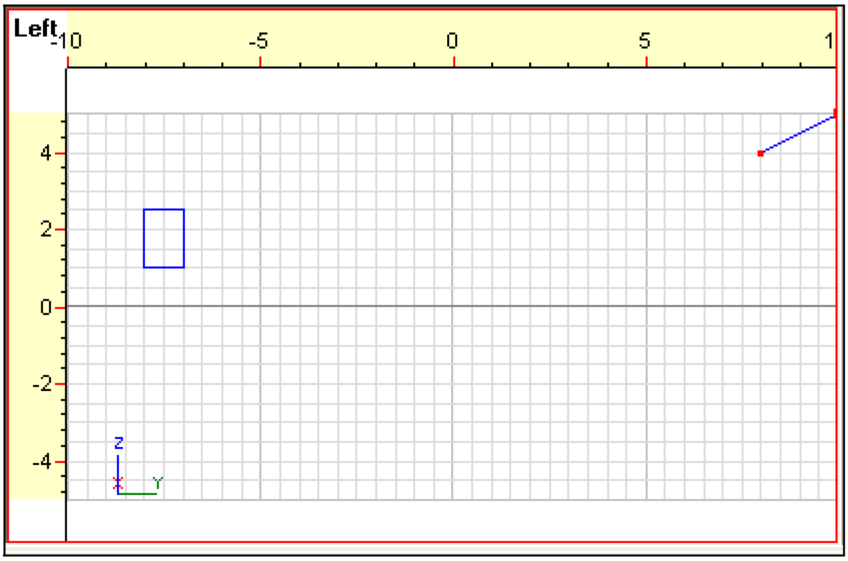
j) Forsvindingspunkterne kan ikke ses i feltet *Perspective*. Det kan du ændre ved i *Edit Perspective* dialogboksen at ændre værdien i *Field Of View* til 1:1 i stedet for 2:1, så en større synsvinkel vises. Prøv det! Eventuelt kan du kontrollere, at forsvindingspunkterne ligger de rigtige sted ifølge sætning 6d). Husk, at distancen i billedet per default er sat til 0,5 i *Edit Perspective* dialogboksen!

Opgave 8.4 (Romerske buer)

I denne opgave skal du konstruere en facade med vinduer med romerske buer og kigge på det i perspektiv.

a) Åben Perspective Modeler og slet huset.
b) Scenen skal ændres via *View* > *Scene Properties...* (F6). Sæt x-grænserne til –5 og 5, y-grænserne til –10 og 10 og z-grænserne til –5 og 5. Fjern afmærkningen i *Automatic Grid Settings* og sæt *Minor Grid Space* til 0,5 og *Major Grid Space* til 5. Afslut med *OK*. Hvert tern i scenen er nu et kvadrat med sidelængden 0,5 meter.
c) Klik på *Reset Eye Point* knappen i værktøjslinjen, så øjepunktet er indenfor scenen.
d) Vælg menuen *View* > *Rulers* (Ctrl+R) for at få vist linealer.
e) Aktiver feltet *Left*. Vælg *Rectangle Tool* i værktøjslinjen, og mens du holder Shift-tasten nede for at udføre ”Snap to Grid”, trækker du et lille rektangel med bredden 2 tern og højden 3 tern ud i feltet *Left*, på stedet angivet på figur 77.

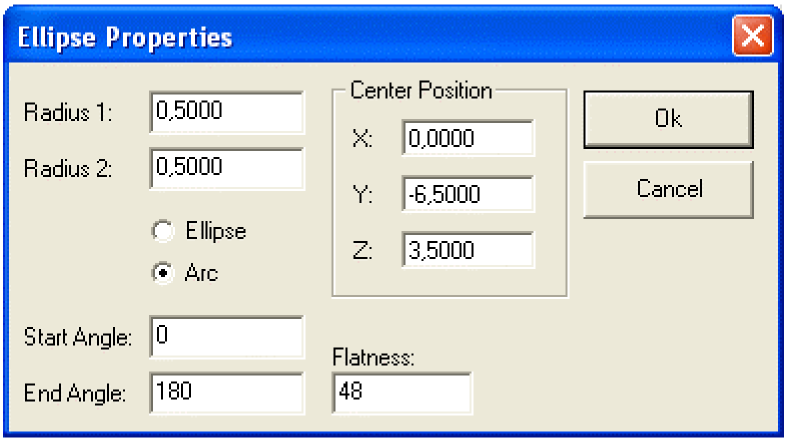
Figur 77



f) I *Object Manageren* skal du nu ekspandere rectangle-objektet og vælge den linje ud, som svarer til toppen af rektanglet. Når det er markeret med rødt klikker du på Delete-tasten for at slette linjen.
g) Der er nu kun tre sider tilbage i rektanglet! Vi skal have lavet en halvcirkel for oven. Vælg *Ellipse Tool* i værktøjslinjen og mens du holder både Ctrl-tasten og Shift-tasten nede trækker du et sted i feltet *Left* en cirkel med diameter 2 felter ud.

h) Hvor du trak cirklen ud, er ikke så afgørende, da du kan flytte den senere. For at fjerne en del af cirklen vælges, mens cirklen er markeret med rødt, menuen *Object > Properties...* (F4). I den fremkomne dialogboks vælger du *Arc* og ændrer *End Angle* til 180, underforstået 180 grader. Afslut med *OK*.

Figur 78



i) Halvcirklen skal nu flyttes: Vælg *Pick Tool* i værktøjslinjen og marker halvcirklen, hvis den ikke allerede er det. Træk, mens du holder Shift-tasten nede for at udføre ”Snap-to-Grid”, herefter halvcirklen hen over det åbne hul i rektanglet, så hullet lukkes og et vindue med en romersk bue er skabt!

j) Mens du holder Shift-tasten nede markerer du rektangel- og ellipseobjektet i *Object Manageren*, så begge er markeret med rødt. Vælg herefter menuen *Object > Group* (Ctrl+G) for at gruppere objekterne til et. Eventuelt kan du klikke et par gange på objektet og ændre dets navn til ”Vindue”.

k) Vi skal have lavet en række kopier af vinduet og flytte dem lidt til siden, så der skabes en række på 5 vinduer, så afstanden mellem dem er 1 meter, dvs. 2 felter. Marker vindue-objektet med *Pick Tool* og vælg menuen *Object > Duplicate* (Ctrl+D). Herved er en identisk kopi af vinduet skabt oven i det gamle. Mens det nye objekt er markeret (se i *Object Manageren*!) klikker du på *Rel*-knappen i bjælken nede til venstre. I *y*-koordinaten til *Move* skriver du 2 og afslutter med *Apply*. Herved er vinduet blevet flyttet det ønskede stykke til siden! Gentag proceduren med det nye vindue, så du til sidst har 5 vinduer, som ønsket

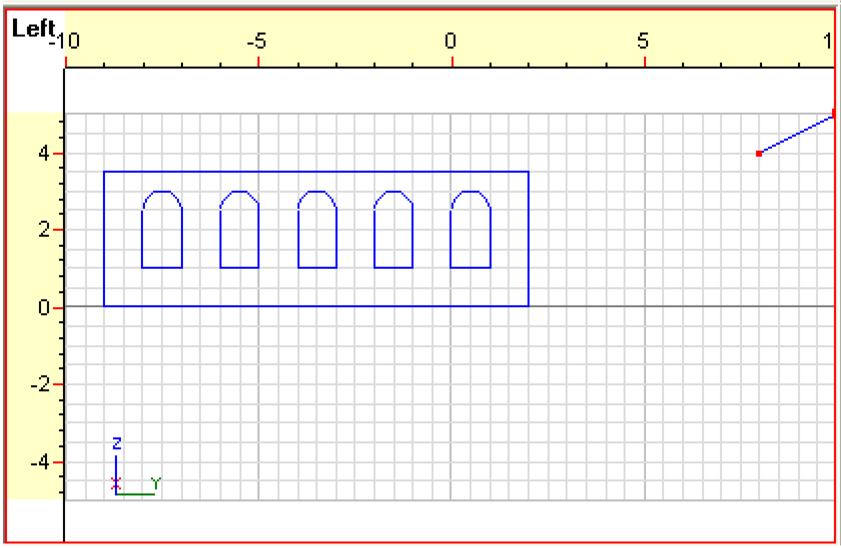
l) Lav endelig en facade-ramme omkring vinduerne, som på figur 79 på næste side.

m) Da objektet er skabt, er vi nu parate til at betragte billedet: Vælg menuen *View > Edit Perspective...* og sæt *Eye Point* til $(5;7,5;2,5)$ og *Viewing Direction* til $(-1,5;-2,5;0)$. Afslut med *OK*. Hvorfor er der tale om lodret billedplan? Hvad observerer du i det perspektiviske billede? Hvad med forkortninger?

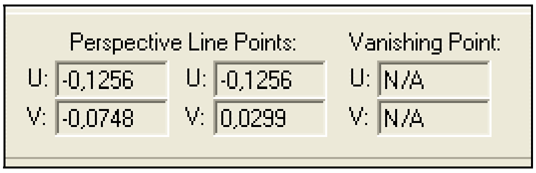
n) Marker en enkelt linje i objektet, for eksempel den fjerneste lodrette linje i facaderammen: Det kan du gøre enten ved at finde linjen i *Object Manageren* eller ved i et vilkårligt af felterne at klikke nogle gange på den pågældende linje, mens du holder Ctrl-tasten nede, indtil kun linjen er markeret. Når kun linjen er markeret, fremkommer de perspektiviske koordinater for linjens endepunkter på bjælken nederst til højre. Se figur 80. Disse data kan benyttes til at bestemme perspektiviske længder. Benyt formlen for afstanden mellem to punkter med de perspektiviske koordinater $Q_1(u_1, v_1)$ og $Q_2(u_2, v_2)$ til at beregne den perspektiviske længde af linjen:

$$\text{dist}(Q_1, Q_2) \;=\; \sqrt{(u_2 - u_1)^2 + (v_2 - v_1)^2}$$

Figur 79



Figur 80



Opgave 8.5 (Spiralkurve)

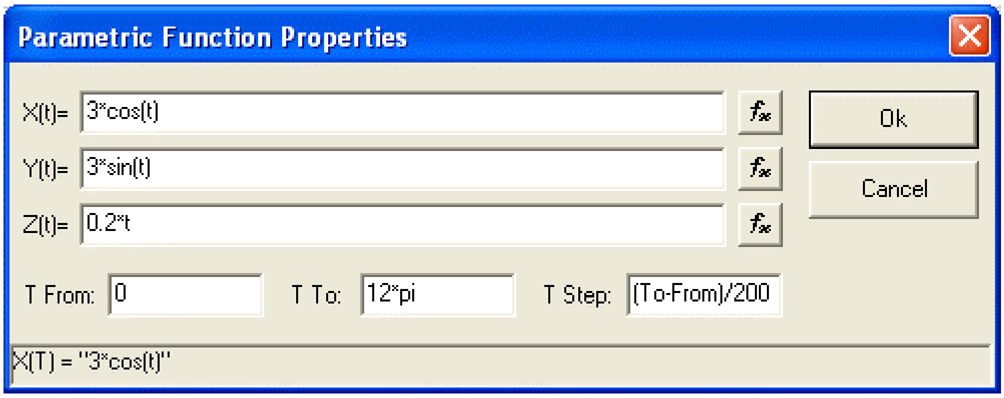
I denne opgave skal vi tegne det perspektiviske billede af rumkurven med følgende parameterfremstilling:

$$\vec{r}(t) \;=\; \begin{pmatrix} 3 \cdot \cos(t) \\ 3 \cdot \sin(t) \\ 0{,}2 \cdot t \end{pmatrix}$$

a) Åben Perspective Modeler og slet huset.

b) Klik på $\boxed{f(x)}$ -knappen i værktøjslinjen og indtast de udtryk, som du ser på figur 81. Bemærk, at * repræsenterer et gangetegn og at man bruger decimalpunktum og ikke decimalkomma! Hvis du er i tvivl om hvilke funktioner, der er til rådighed i editoren, så kan du klikke på de små knapper f_x til højre for koordinatfunktionerne. Hvis du markerer en af funktionerne følger desuden en beskrivelse af funktionens art og parametre. ”T From” og ”T To” angiver grænserne for parameteren t, mens værdien i ”T Step” nedenfor angiver, at kurven tilnærmes med 200 linjestykker. Skulle du senere få brug for at redigere i kurvens parameterfremstilling, så marker kurven i et af felterne eller i *Object Manageren* og vælg menuen *Object* > *Properties...* (F4). Man kan endda definere sine egne funktioner via menuen *View* > *Functions...*, men det skal vi ikke komme nærmere ind på her.

Figur 81



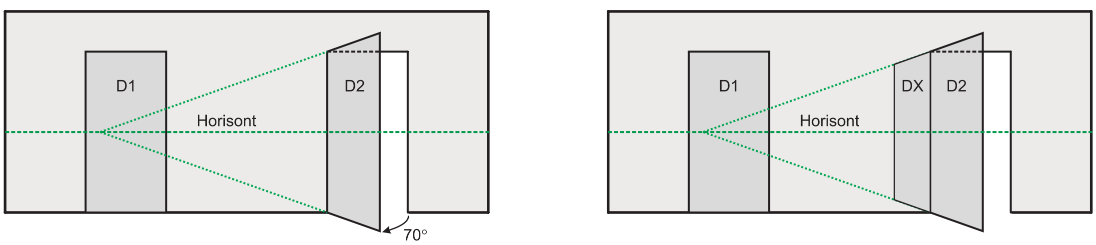
c) Prøv at forklare, hvorfor kurven er en spiral med 6 vindinger? *Hjælp*: Hvis du glemmer *z*-koordinaten et øjeblik, hvad forestiller den plane kurve da?
d) Kig på spiralen fra forskellige vinkler.

Opgave 8.6 (Åbne døre)

I denne lidt løst beskrevne opgave skal du bruge Perspective Modeler til at konstruere en væg med to døre i: En dør D1, som er lukket og en dør D2, som er åbnet 70° udfra væggen, som vist på figur 82. Når du skal konstruere den drejede dør, så kan du selvfølgelig regne dig frem til koordinaterne. Imidlertid kan man få programmet til at dreje døren. Hvis man markerer D2 og sætter z-koordinaten til –70 i *Rotate* i bjælken nede til venstre, så vil D2 blive drejet med 70 grader om en lodret akse igennem D2's *centrum*, hvilket ikke er meningen. Heldigvis kan man løse problemet på en smart måde: Lav en kopi DX af D2 og flyt den lidt til siden, så DX og D2 rører ved hinanden langs den kant, hvorom man ønsker at dreje. Grupper derefter de to objekter og foretag drejningen (se figur 83). Herefter kan du markere DX og skjule den med Ctrl+H. Prøv det!

a) Kig på væggen i frontperspektiv og med vandret synsretning.
b) Sørg for at få Perspective Modeler til at tegne linjer til forsvindingspunkterne.

Figur 82 og 83



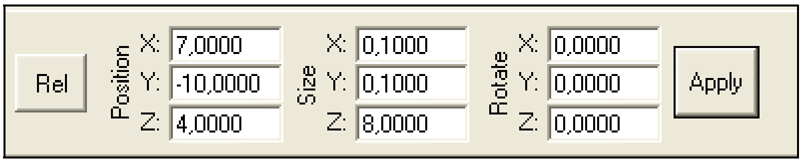
Opgave 8.7 (Vej med lysmaster)

I denne opgave skal vi studere en vej med et hus og tilføje nye ting, blandt andet nogle lysmaster. Herudover skal vi studere forsvindingspunkter.

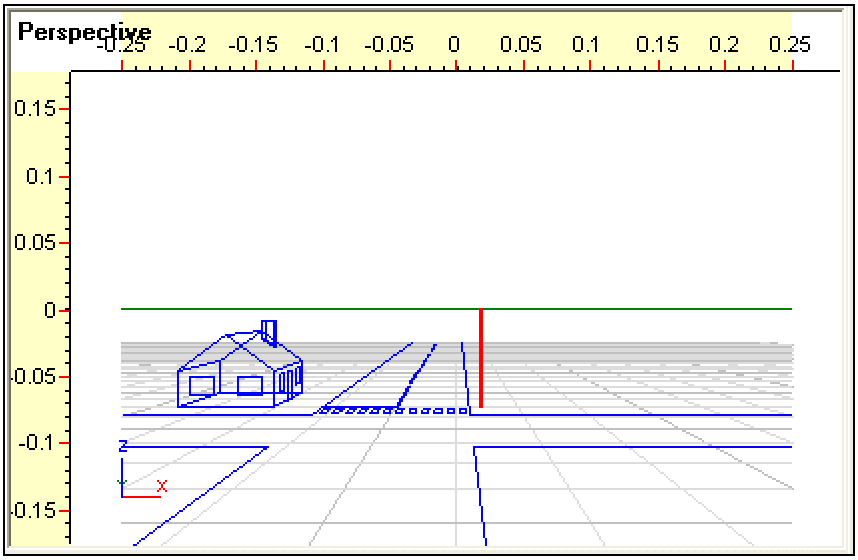
a) Åben Perspective Modeler og slet huset. Åben filen *road.pmp* fra mappen *Samples*.

b) Start med at lave en lysmast. Den kan passende fremstilles som en kasse, så vælg *Box Tool* fra værktøjslinjen (ikke *Rectangle Tool*!!). Træk en kasse ud et eller andet sted i feltet *Top*. Ret kassens placering og dimensioner til via de absolutte data:

Figur 84



Figur 85



c) Dupliker masten via Ctrl+D og flyt kopien, mens den er markeret, 15 meter ud af vejens højre kant, dvs. i y-aksens retning. Hertil kan du bruge de relative data ved at klikke på *Rel* knappen på bjælken nederst til venstre ... Gentag proceduren, så du får en hel række master ud af vejen. Du er også velkommen til selv at konstruere et hus eller lave en kopi af det eksisterende ... Bemærk, at det kan være nyttigt at gruppere objekter! Husk, at du kan se en stor udgave af et felt ved at højreklikke på det og komme tilbage igen ved at højreklikke. Du kan også bruge F2/F3 til at zoome ind/ud med i felterne! Hvis du ønsker en større eller mindre synsvinkel kan du klikke på knappen med øjet i værktøjslinjen og vælge *Field of View* ...

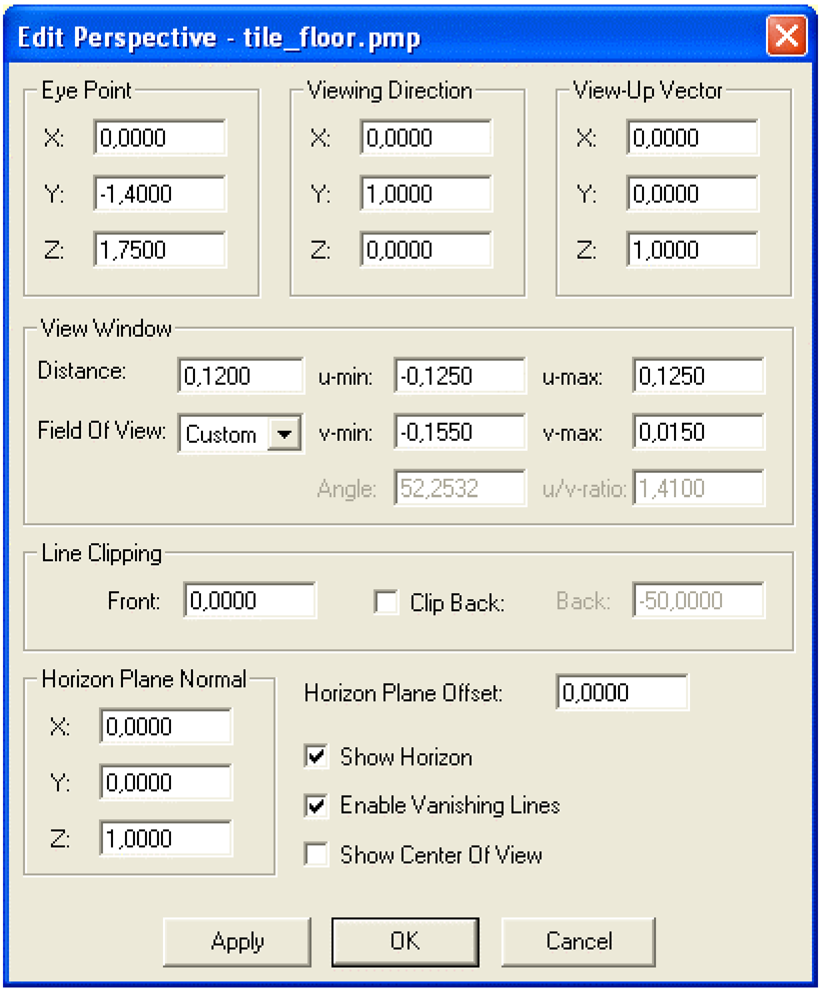
d) Marker den forreste mast og tryk på F5 tasten for at få tegnet linjer til forsvindingspunkter. Gør det samme med huset. Eksperimenter med at bevæge øjepunktet op og ned og til siden og betragt det resulterende perspektiviske billede. Passer det med teorien fra afsnit 6? I de tre projektionsfelter kan du eventuelt bruge piletasterne til at flytte øjepunktet, mens *intet* objekt er markeret! Skridtlængden kan ændres med F6-tasten under *Nudge Offset*. Ctrl+ ↓/Ctrl+ ↑ bevæger øjepunktet ind/ud i feltet!

Opgave 9.1 (Flisegulv)

I denne opgave skal vi betragte det perspektiviske billede af et *flisegulv* bestående af kvadratiske fliser. Vi skal se, at hvis man anvender en for stor synsvinkel i billedet, så ser billedet forkert ud, hvis man ser det fra en for stor afstand. I det følgende kan du enten åbne den færdige fil med navn *Tile_floor.pmp*, som ligger i mappen *Samples/Presentation*, eller også kan du selv fremstille filen efter følgende retningslinjer:

Lav et vandret flisegulv i feltet *Top* med dimensionerne 20 gange 20 meter med flisestørrelse 1 gange 1 meter. Flisegulvet ønskes anbragt fra $x_{\min} = -10$ til $x_{\max} = 10$ og fra $y_{\min} = 0$ til $y_{\max} = 20$. Ellers skal du foretage de indstillinger i *Edit Perspective* dialogboksen, som fremgår af figur 86. Bemærk, at distancen sættes til 0,12 meter, altså 12 cm. Og i *Field Of View* skal du vælge *Custom*, som sætter brugeren i stand til fuldstændigt at styre, hvilken del af billedplanen, som skal vises. Bemærk, at programmet, med de indtastede værdier for u-min, u-max, v-min og v-max, automatisk udregner synsvinklen i billedet. Under *Angle* kan vinklen 52,2532° anes. Det er en meget stor synsvinkel! Du kan fjerne gitteret via menuen *View* > *Grid*.

Figur 86

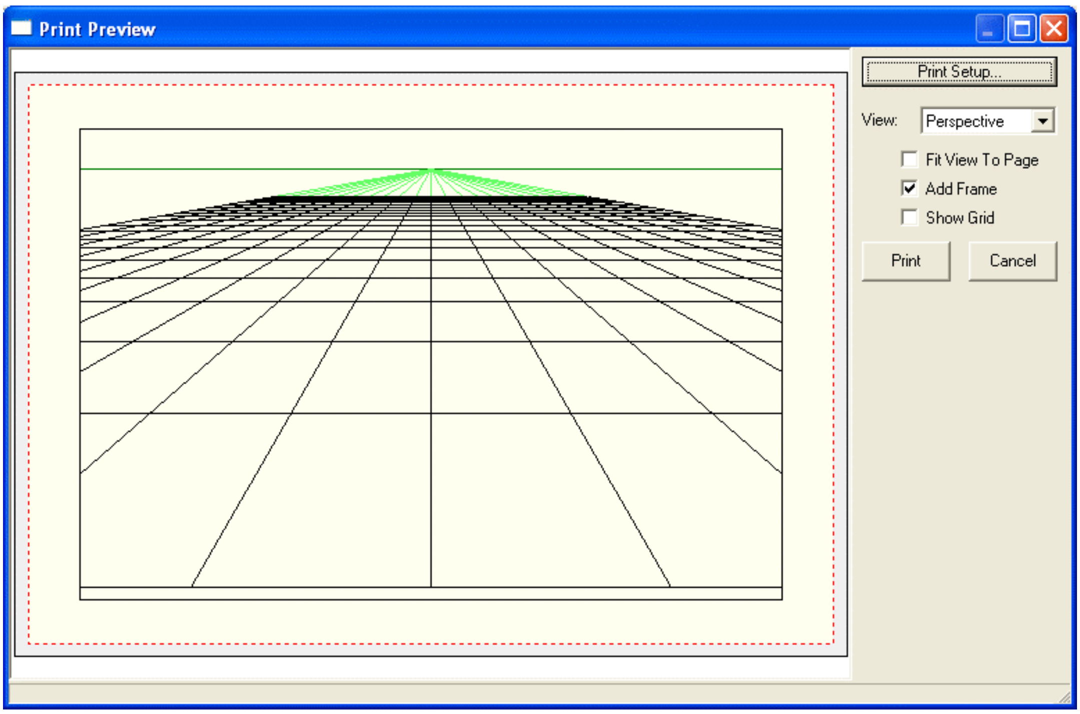


Sørg for at tegne linjer til forsvindingspunktet for dybdelinjerne, som i dette tilfælde er hovedpunktet.

a) Aktiver feltet *Perspective* og vælg *File > Print Preview*... Sørg for , at indstillingen i dialogboksen bliver som anført på figur 87. Måske er du lige nødt til at klikke på *Print Setup* knappen for at indstille printeren til landscape (liggende). Bemærk, at det er meget vigtigt her at *Fit View To Page ikke* er afmærket, fordi vi i denne opgave ønsker at tegne det perspektiviske billede med den størrelse, som er beregnet af Perspective Modeler. Klik herefter på *Print*.

b) Betragt det printede billede på A4 arket. Da distancen er sat til 0,12, dvs. 12 cm, er billedet beregnet til at skulle betragtes i denne afstand lige udfor hovedpunktet, som er forsvindingspunktet for dybdelinjerne (Overvej hvorfor?). Billedet vil se fuldstændigt korrekt ud, hvis du anbringer øjet i nævnte punkt. Hvis du imidlertid flytter øjet ud i en større afstand fra hovedpunktet, så vil du sandsynligvis bemærke, at fliserne ikke længere ser kvadratiske ud, specielt ikke de fliser, som befinder sig nederst i billedet. De ser ud til at være længere i dybderetningen! Årsagen er, at billedet er fremstillet med en meget stor synsvinkel på over 52°, hvilket gør billedet meget følsomt overfor at blive betragtet fra en forkert afstand! Det er ret sandsynligt, at du har svært ved at fokusere med øjnene. når du betragter billedet i 12 cm afstand. Derfor kan det være en god idé at kopiere billedet op med 141% på en kopimaskine, så det kommer op i A3 format. Det betyder nemlig, at det opkopiere billede får en tilknyttet afstand på $1,41 \cdot 12\text{ cm} = 16,9\text{ cm}$. I denne afstand er det lidt letter at fokusere ...

Figur 87



c) Lav med linje-værktøjet en linje, som går igennem diagonalen på en række fliser, dvs. den skal have vinklen 45° i forhold til x-aksen. Marker herefter linjen og tryk F5 for at tegne linjens forsvindingspunkt. Bemærk, at forsvindingspunktet er synligt på horisontlinjen! Hvor skal det teoretisk ligge ifølge sætning 6d)?

d) Som nævnt er synsvinklen for stor, så billedet er følsomt overfor at blive betragtet fra en forkert afstand. Du skal ændre synsvinklen i *Edit Perspective* dialogboksen ved i dropdown menuen *Field of View* at vælge distanceforholdet 2:1. Samtidigt kan du også tillade dig at øge distancen til 0,26, dvs. 26 cm, således at billedet stadig kan være på papiret. Det giver et meget mere harmonisk billede.

Opgave 9.2 (Synsvinkel)

Synsvinklen i et billede defineres som den største vinkel, som er afbildet i vandret/lodret retning i det perspektiviske billede i forhold til hovedpunktet.

a) Vis, at hvis distanceforholdet i et billede er d/a, så er synsvinklen i billedet givet ved formlen: $v = \tan^{-1}(a/d)$.

b) Hvilke synsvinkler svarer distanceforholdene 1:1, 2:1 og 3:1 til?

Opgave 9.3 (Forkortninger)

I denne opgave skal vi studere, hvad der sker med de *perspektiviske forkortninger*, når man bevæger sig tættere på en genstand.

a) Start Perspective Modeler og åben filen *foreshortenings.pmp* fra mappen *Samples*.

b) Aktiver feltet *Perspective* og højreklik derefter på det, så man ser et zoom-billede.

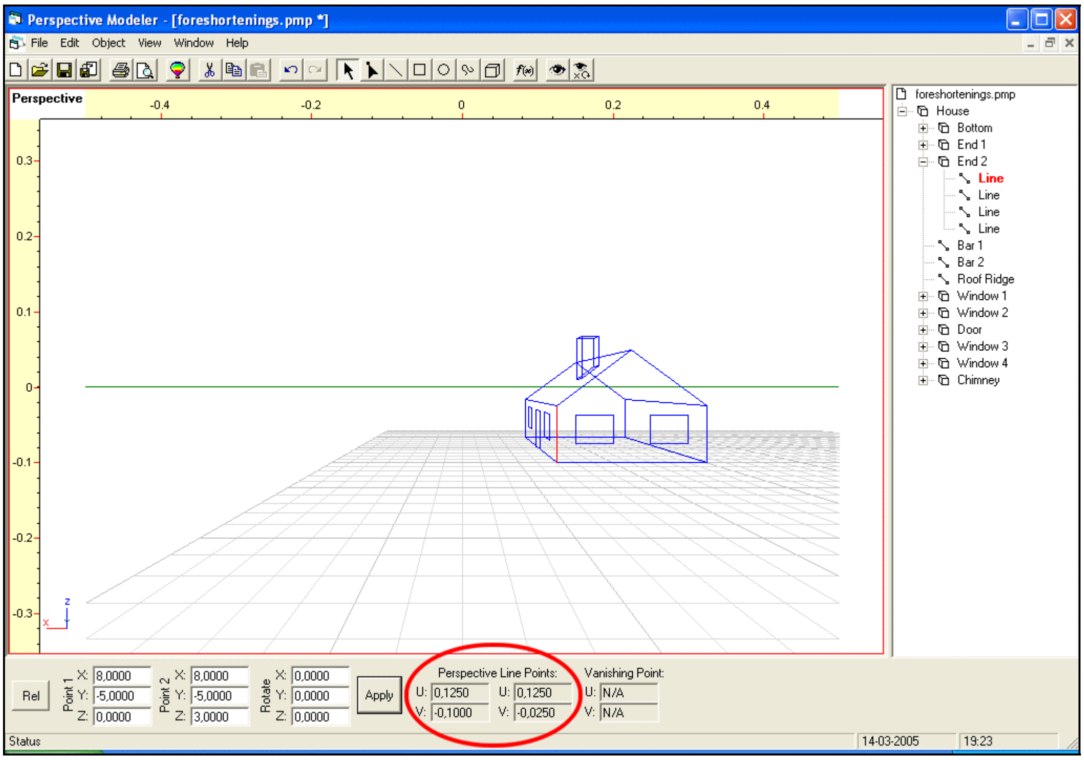
c) Du skal nu markere den forreste lodrette kant til venstre på huset. Dette kan gøres enten ved at finde den pågældende linje i *Object Manageren*. Det er dog nemmere her at holde Ctrl-tasten nede og klikke på kanten et antal gange, indtil kun den ønskede linje er markeret med rødt.

d) Situationen kan ses på figur 88. Her kan du også se, at der i bjælken forneden er dukket nogle nye data op, nemlig de perspektiviske koordinater for den markerede linjes endepunkter. Da linjen jo er lodret, bliver førstekoordinaterne, dvs. u-koordinaterne, ens. Derfor kan længden af linjen findes ved blot at trække andenkoordinaterne, dvs. v-koordinaterne, fra hinanden. Længden er altså: $-0,0250-(-0,1000) = 0,0750$. Prøv selv at markere den bageste lodrette kant i den samme side som førstnævnte. Hvad er linjens perspektiviske længde? De to lodrette linjer er i virkeligheden lige lange, men hvad er forholdet mellem deres perspektiviske længder?

e) Du skal nu bevæge dig tættere på huset ved at ændre *Eye Point* til $(13,5,4)$. Bestem nu igen de perspektiviske længder af de to linjer fra punkt d) Hvad er forholdet nu? Kan du drage konklusioner og måske forklare resultatet?

f) Piletasterne kan bruges til at flytte øjepunktet i feltet *Perspective*. Aktiver feltet. Da vil piletasterne på oplagt vis flytte øjepunktet til venstre/til højre/op/ned, mens kombinationerne Ctrl+$\uparrow$ og Ctrl+$\downarrow$ vil bevæge øjepunktet henholdsvis fremad og tilbage. Alt sammen i forhold til ”kameraets orientering”. Man kan også dreje kameraet: Shift i kombination med en piletast vil på oplagt vis dreje kameraet til venstre/til højre/op/ned, mens Shift + Ctrl+ $\leftarrow$ og Shift + Ctrl+ $\rightarrow$ vil *tilte* kameraet mod henholdsvis venstre og højre. Eksperimenter selv på egen hånd!

Figur 88



Opgave 9.4

Hvis man fordobler distancen *d* i et billede, giver det så det samme perspektiviske billede, som hvis man går dobbelt så tæt på motivet? Begrund!

Opgave 10.1

I denne øvelse skal studeres frøperspektiv og fugleperspektiv af et højhus.

a) Start Perspective Modeler og åben filen *high_rise.pmp* fra mappen *Samples*.

b) I *Object Manageren* skal du ekspandere objektet ”Højhus” og markere delobjektet ”Omrids”. Klik på F5 tasten for at få tegnet linjer til forsvindingspunkter.

c) I *Edit Perspective* dialogboksen kan du indstille *Field Of View* til 1:1 og *Eye Point* til $(20;-16;1,5)$ og *Viewing Direction* til $(-12;0;8)$. Kommenter linjeforløbene.

d) Kig på højhuset i fugleperspektiv ved at *Eye Point* sættes til $(20;-16;60)$ og *Viewing Direction* til $(-12;0;-8)$. Kommenter linjeforløbene.

e) Kig på huset lodret oppefra ved at sætte *Eye Point* til $(-37;-16;60)$ og *Viewing Direction* til $(0;0;-1)$ samt *View-Up Vector* til $(1,0,0)$. Sidstnævnte angiver, hvad der er ”op” i den perspektiviske plan! Kommenter igen linjerne.

Opgave 10.2

Analyser hvilke perspektiver der er tale om på figur 89 og 90. Kommenter linjerne!

Figur 89

Figur 90

Websites

www.matematiksider.dk/perspektiv_over.html
www.geocities.com/~jlhagan/K9-14/introduction.htm
www.generativeart.com/salgado/anamorphic.htm

Litteratur

Kirsti Andersen. *Geometrien bag perspektivet*. Matematiklærerforeningen, 1993.
Kirsti Andersen. *Synspyramider & forsvindingspunkter* – Træk af historien om geometri og perspektivlære. Foreningen Videnskabshistorisk Museums Venner, 2. udgave, Århus 1989.
David Chelsea. *Perspective! For Comic Book Artists*. Watson-Guptill Publications, New York, 1997.
Torkil Clante. *Tegn, Perspektiv på fri hånd*. Gyldendal, 1993.
Alison Cole. *Perspective – Discover the theory and techniques of perspective, from the Renaissance to Pop Art*. Serien Eyewithness Guides, forlaget Dorling Kindersley, 1992.
Marianne Marcussen. *Perspektiv – Om rumopfattelse og rumgengivelse*. Nyt Nordisk Forlag, Arnold Busck, København, 1987.
Claus Jensen. *Perspektivkasser og matematik*. Nordisk Matematisk Tidskrift (Normat), hæfte 4, 2004, s. 160-171.
Ray Smith. *An Introduction to Perspective*. Serien The Art School, forlaget Dorling Kindersley, 1995.
Carl Schwenn. *Linie Perspektiv – konstruktionsbog*. Byggeriets Studiearkiv, Kunstakademiets trykkeri, 1981.
Erik Vestergaard. *Matematik i perspektiv*. Forlaget ABACUS, 1995.

Stikordsregister