Potensudviklinger

Billeder:

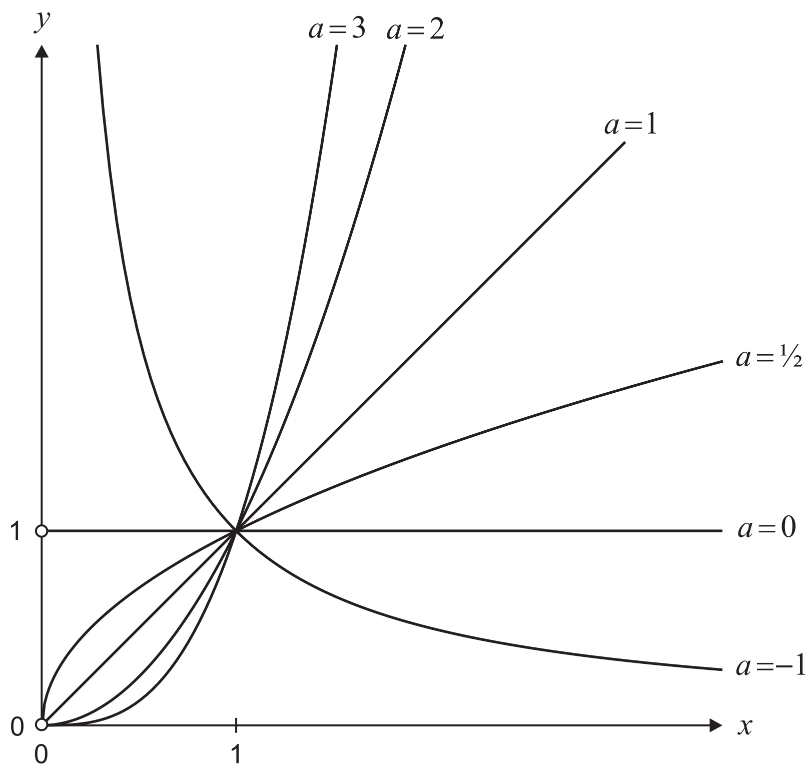
Forside: Collage af billeder:
©iStock.com/titoslack
©iStock.com/Yuri
Desuden egne fotos og illustrationer

Definition 1

En funktion på formen $f(x) = b \cdot x^a$, $x \in R_+$, hvor $b \in R_+$ og $a \in R$ er konstanter, kaldes for en *potensudvikling* eller en *potensiel funktion*. Bemærk, at man konsekvent har valgt at definere funktionerne for udelukkende positive x-værdier, selvom man for visse værdier af a godt kunne have indsat negative værdier af x. For andre værdier af a, for eksempel $a = ½$, vil det derimod ikke give mening at indsætte negative x-værdier (Overvej!). Hvis $b = 1$ kaldes funktionen for en *potensfunktion*.

Eksempel 2

Nedenfor er afbildet graferne for forskellige potensfunktioner (dvs. $b = 1$). Vi ser, at potensfunktionen er *voksende* når $a > 0$ og *aftagende* når $a < 0$. For $a = 0$ er funktionen *konstant*.



Hvis man ændrer på b-værdierne i forskrifterne for de afbildede funktioner, så vil de nye grafer <u>*ikke*</u> være en parallelforskydning i forhold til de gamle; derimod vil der være tale om en *skalering* i y-aksens retning. Det vil svare til, at man strækker eller komprimerer grafen i y-aksens retning (Overvej hvorfor!).

Sætning 3

Lad $f(x) = b \cdot x^a$; $x \in R_+$. Da gælder:

a) Grafen for f går igennem punktet $(1, b)$.

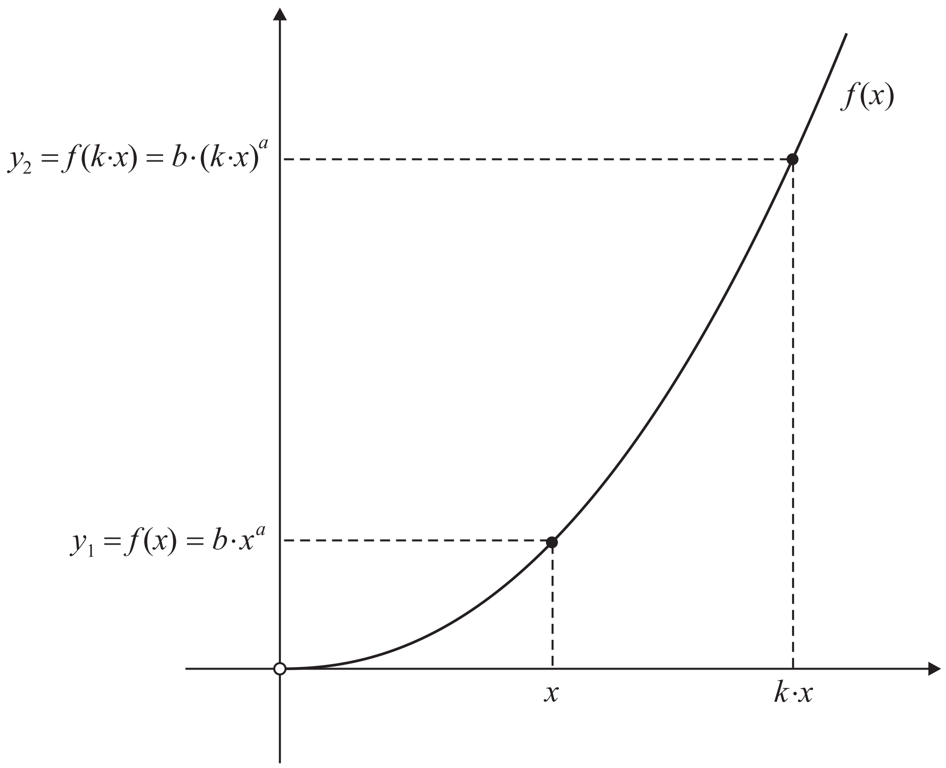
b) x ganges (*fremskrives*) med k $\Rightarrow$ y ganges (*fremskrives*) med k^a.

c) Funktionen er *voksende*, hvis $a > 0$, *aftagende*, hvis $a < 0$ og *konstant*, hvis $a = 0$.

Bevis: $f(1) = b \cdot 1^a = b \cdot 1 = b$. Dette viser a). For at vise b) indsætter vi $k \cdot x$ i forskriften for f og omskriver:

(1) $$y_2 = f(k \cdot x) = b \cdot (k \cdot x)^a = b \cdot k^a \cdot x^a = k^a \cdot (b \cdot x^a) = k^a \cdot f(x) = k^a \cdot y_1$$

hvor vi for at få tredje lighedstegn har benyttet en af potensreglerne. Udregningen (1) viser, at hvis x ganges med k, så bliver den nye y-værdi k^a gange så stor som den forrige y-værdi. c) Overlades til læseren at overveje.



□

Bemærk, at sætning 3b) fortæller os, at hvis x ganges med et bestemt tal, så ganges også y med et bestemt tal – *uafhængigt* af hvilket x man startede med!

Husk fra rentesregningen, at når man ganger med et tal F (*fremskrivningsfaktoren*), så svarer det til at lægge *renten* r til, hvor sammenhængen mellem F og r er $F = 1 + r$. At lægge 25% til 500 svarer altså til at gange 500 med 1,25, idet $F = 1 + r = 1 + 0,25 = 1,25$. Vi siger, at 500 har fået en *relativ tilvækst* på 0,25 eller 25%. Omvendt svarer en fremskrivningsfaktor på 0,88 til at trække 12% fra, idet $r = F - 1 = 0,88 - 1 = -0,12 = -12\%$.

Denne sammenhæng mellem fremskrivningsfaktoren F og den relative tilvækst r betyder, at vi kan omformulere sætning 3b). Da vi har at gøre med fremskrivning af både x og y, vil vi indføre betegnelsen F_1, som det x fremskrives med, mens F_2 skal betegne det, som y fremskrives med. Tilsvarende vil vi lade r_1 betegne den relative tilvækst i x, mens r_2 skal betegne den relative tilvækst i y. Vi har dermed

(2) $$F_1 = 1 + r_1 \quad \text{og} \quad F_2 = 1 + r_2$$

Sætning 3b) kan dermed udtrykkes på følgende måde: $F_1 = k \;\Rightarrow\; F_2 = k^a$, hvormed

(3) $$F_2 = F_1^{\,a}$$

Indsættes udtrykkene fra (2) i (3), fås følgende sætning:

Sætning 4 (Relative tilvækster)

Givet en potensiel udvikling. Hvis x gives en *relativ tilvækst* på r_1, så får y en relativ tilvækst på r_2, bestemt ved:

(4) $$1 + r_2 \;=\; (1 + r_1)^a$$

Eksempel 5

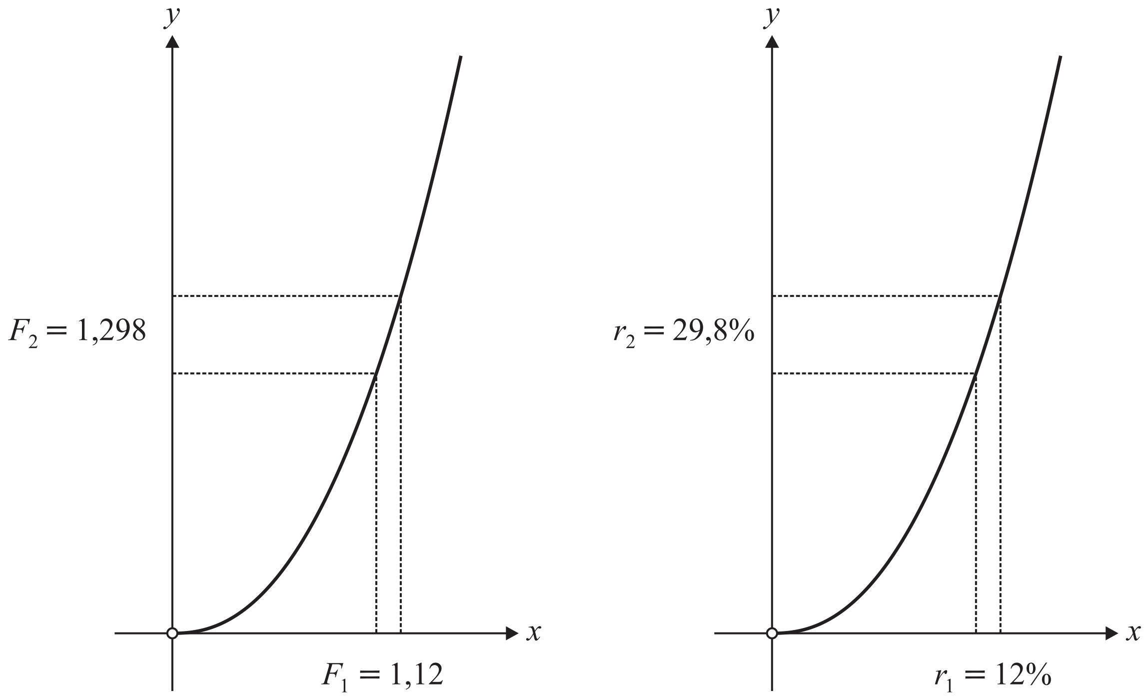
Betragt potensudviklingen med forskrift $f(x) = 2 \cdot x^{2,3}$.

a) Hvad sker der med y, hvis x ganges med 1,12?
b) Oversæt det, som sker i spørgsmål a), til relative tilvækster i x og y.
c) Hvor meget skal man gange x med, for at y fordobles?

Løsning:

a) Ifølge (3) fås: $F_1 = 1,12 \;\Rightarrow\; F_2 = F_1^{\,a} = 1,12^{2,3} = 1,298$, så y ganges med 1,298.
b) Ifølge (2) haves: $r_1 = F_1 - 1 = 1,12 - 1 = 0,12 = 12\%$ og $r_2 = F_2 - 1 = 1,298 - 1 = 0,298$ $= 29,8\%$. En relativ tilvækst på 12% i x giver altså en relativ tilvækst på 29,8% i y.
c) Da $F_2 = 2$ fås ifølge (3): $F_2 = F_1^{\,a} \;\Leftrightarrow\; 2 = F_1^{\,2,3} \;\Leftrightarrow\; \sqrt[2,3]{2} = F_1 \;\Leftrightarrow\; 1,352 = F_1$. Svaret er altså, at x skal ganges med 1,352.

Figuren på næste side illustrerer skematisk situationen i spørgsmålene a) og b).



□

Eksempel 6

Betragt potensudviklingen med forskrift $f(x) = 13,4 \cdot x^{0,54}$.

a) Hvis *x* vokser med 17%, hvor mange procent vokser *y* da med?

b) Hvor mange procent skal *x* vokse med, for at *y* vokser med 27%?

Løsning: Vi benytter sætning 4.

a) $1 + r_2 = (1 + r_1)^a \;\Leftrightarrow\; 1 + r_2 = (1 + 0,17)^{0,54} \;\Leftrightarrow\; 1 + r_2 = 1,17^{0,54} \;\Leftrightarrow\; 1 + r_2 = 1,088$

$\Leftrightarrow\; r_2 = 1,088 - 1 = 0,088 = 8,8\%$

Svaret er altså, at *y* vokser med 8,8%.

b) $1 + r_2 = (1 + r_1)^a \;\Leftrightarrow\; 1 + 0,27 = (1 + r_1)^{0,54} \;\Leftrightarrow\; 1,27 = (1 + r_1)^{0,54} \;\Leftrightarrow\; \sqrt[0,54]{1,27} = 1 + r_1$

$\Leftrightarrow\; 1,557 = 1 + r_1 \;\Leftrightarrow\; 1,557 - 1 = r_1 \;\Leftrightarrow\; 0,557 = r_1 \;\Leftrightarrow\; 55,7\% = r_1$

Dermed konkluderer vi, at *x* skal vokse med 55,7%, for at *y* vokser med 27%.

□

Eksempel 7

Lad $f(x) = 480 \cdot x^{-0,84}$. Hvor mange procent øges *y* med, hvis *x* reduceres med 22%?

Løsning: Vi benytter igen sætning 4.

$1 + r_2 = (1 + r_1)^a \;\Leftrightarrow\; 1 + r_2 = (1 + (-0,22))^{-0,84} \;\Leftrightarrow\; 1 + r_2 = 0,78^{-0,84} \;\Leftrightarrow\; 1 + r_2 = 1,232$

$\Leftrightarrow\; r_2 = 1,232 - 1 = 0,232 = 23,2\%$.

Vi konkluderer, at *y* vokser med 23,3%.

□

Forskriften udfra to støttepunkter

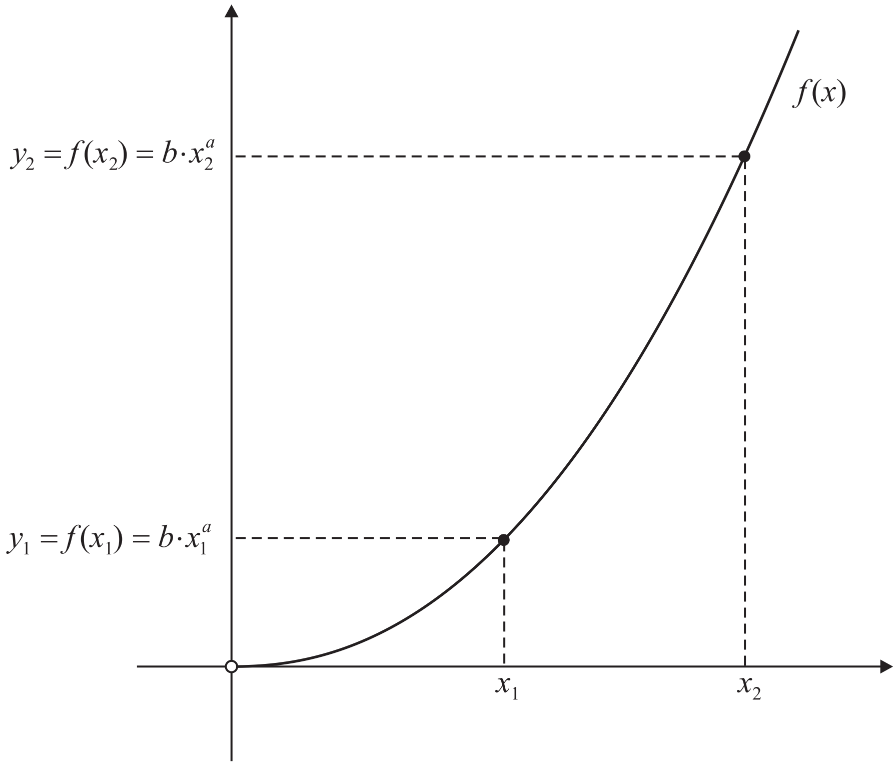
Vi har tidligere set, at man kan bestemme forskriften for en lineær funktion og en eksponentiel funktion, når man kender to punkter på funktionens graf. Dette er også tilfældet med potensudviklinger. Det vil vi se på nu.

Sætning 8

Lad $f(x) = b \cdot x^a$ og lad (x_1, y_1) og (x_2, y_2) være to punkter på grafen for f. Da kan eksponenten a bestemmes ved følgende formel:

(5) $$a = \frac{\log(y_2) - \log(y_1)}{\log(x_2) - \log(x_1)}$$

Bevis:



Da punkterne ligger på grafen, haves $y_1 = b \cdot x_1{}^a$ og $y_2 = b \cdot x_2{}^a$, som angivet på figuren. x_1, x_2, y_1 og y_2 skal her antages at være kendte. Derimod er a og b ukendte. Man ser snedigt, at man kan skaffe sig af med den ene ubekendte, b, ved at tage forholdet mellem de to y-værdier:

(6) $$\frac{y_2}{y_1} = \frac{b \cdot x_2{}^a}{b \cdot x_1{}^a} = \frac{x_2{}^a}{x_1{}^a} = \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^a$$

hvor vi blandt andet har brugt en potensregel. For at isolere a tager vi logaritmen på begge sider af (6). Herved fås:

$$\log\left(\frac{y_2}{y_1}\right) = a \cdot \log\left(\frac{x_2}{x_1}\right)$$
$$\Updownarrow$$
(7) $$\log(y_2) - \log(y_1) = a \cdot \left[\log(x_2) - \log(x_1)\right]$$
$$\Updownarrow$$
$$a = \frac{\log(y_2) - \log(y_1)}{\log(x_2) - \log(x_1)}$$

hvor logaritmereglerne er blevet anvendt. □

Eksempel 9

Bestem forskriften for den potensielle funktion, hvis graf går igennem følgende to punkter: (2,5) og (6,27).

Løsning:

$$a = \frac{\log(y_2) - \log(y_1)}{\log(x_2) - \log(x_1)} = \frac{\log(27) - \log(5)}{\log(6) - \log(2)} = 1,5350$$

Dermed haves foreløbigt: $f(x) = b \cdot x^{1,5350}$. For at bestemme b indsættes ét af de to opgivne datapunkter, ligegyldigt hvilket. Vi vælger (2,5):

$$5 = b \cdot 2^{1,5350} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{5}{2^{1,5350}} = b \quad \Leftrightarrow \quad 1,7254 = b$$

Altså fås $f(x) = 1,7254 \cdot x^{1,5350}$.

□

Bemærkning 10

For at finde b, kan du også skrive mere direkte: $b = \dfrac{y}{x^a} = \dfrac{5}{2^{1,5350}} = 1,7254$.

Bemærkning 11

Af (7) fremgår det, at man kan bruge følgende alternative udtryk for a:

(8) $$a = \frac{\log\left(\dfrac{y_2}{y_1}\right)}{\log\left(\dfrac{x_2}{x_1}\right)}$$

Dobbeltlogaritmisk papir

Sætning 12

f er en potensfunktion

$\Updownarrow$

$\log(y)$ er en lineær funktion af $\log(x)$

Bevis: Lad os først vise $\Downarrow$: Det antages, at f er en potensudvikling, dvs. at funktionen kan skrives på formen: $y = b \cdot x^a$ med $b \in R_+$. Hvis vi tager logaritmen på begge sider af lighedstegnet og udnytter logaritmereglerne fås:

(9) $$\log(y) = \log(b \cdot x^a) = \log(b) + \log(x^a) = a \cdot \log(x) + \log(b)$$

Heraf ser vi, at logaritmen til y er en lineær funktion af logaritmen til x, med hældningskoefficient a og konstantled $\log(b)$.

Lad os dernæst slutte den anden vej, $\Uparrow$: Det antages, at $\log(y)$ er en lineær funktion af $\log(x)$, dvs. vi har $\log(y) = c \cdot \log(x) + d$ for to konstanter $c, d \in R$. Vi tager antilogaritmen på begge sider og får:

(10) $$y = 10^{c \cdot \log(x) + d} = 10^{c \cdot \log(x)} \cdot 10^d = (10^{\log(x)})^c \cdot 10^d = 10^d \cdot x^c$$

hvor to potensregler er benyttet. Vi ser, at der virkeligt er tale om en potensudvikling, med eksponent c og $b = 10^d$.

□

Når vi tegner grafen for en funktion, så gøres det på grundlag af en række støttepunkter $(x, f(x))$, hvor y-koordinaten er funktionsværdien i x. Hvis man i stedet afsætter punkter $(\log(x), \log(f(x)))$, dvs. udskifter alle x- og y-værdier med deres logaritmer, så får man selvfølgelig en anden kurve. Sætning 12 udtrykker da, at *kurven er en ret linje hvis og kun hvis f er en potensudvikling*. Dette er et smart kriterium til at afgøre om en ukendt funktion er en potensudvikling eller ej. Det er nemlig meget nemmere at afgøre om en kurve er en ret linje end at afgøre om en kurve krummer på den rigtige måde. Der findes for eksempel mange ikke-potensielle udviklinger, hvis grafer krummer omtrent som grafen for en potensiel udvikling! Nu vil det være besværligt at skulle til at beregne logaritmerne til alle x- *og* y-værdierne; derfor har man indført et såkaldt *dobbeltlogaritmisk papir*, hvor man slipper for at tage logaritmerne, idet både x- og y-akse er udstyret med en logaritmisk skala, som omtalt tidligere. Vi kan altså konkludere:

Sætning 13

En funktion er en potensudvikling *hvis og kun hvis* dens graf er en retlinet graf i et dobbeltlogaritmisk koordinatsystem.

Eksempel 14

Tegn grafen for $f(x) = 35 \cdot x^{1,25}$ på dobbeltlogaritmisk papir og løs følgende opgaver:

a) Bestem funktionsværdien i $x = 20$ ved aflæsning og ved beregning.
b) Løs ligningen $f(x) = 150$ ved aflæsning og ved beregning.

Løsning:
Husk, at der på logaritmiske akser ikke er et nulpunkt, idet aksen kun kan indeholde *positive* værdier. Vi vælger at afbilde grafen for x i de to dekader fra 1 til 100. Andenaksen kan da passende indeholde de tre dekader fra 10 til 10000. Ifølge sætning 13 er grafen på dobbeltlogpapir en ret linje. Vi behøver derfor blot udregne to støttepunkter.

$f(1) = 35 \cdot 1^{1,25} = 35$; $f(30) = 35 \cdot 30^{1,25} = 2457$.

Grafpunkterne (1,35) og (30,2457) indtegnes på papiret og linjen igennem dem tegnes (se næste side).

a) Aflæsning: $f(20) = 1480$. Beregning: $f(20) = 35 \cdot 20^{1,25} = 1480,32$.
b) Aflæsning: $f(x) = 150 \Leftrightarrow x = 3,2$. Beregning:

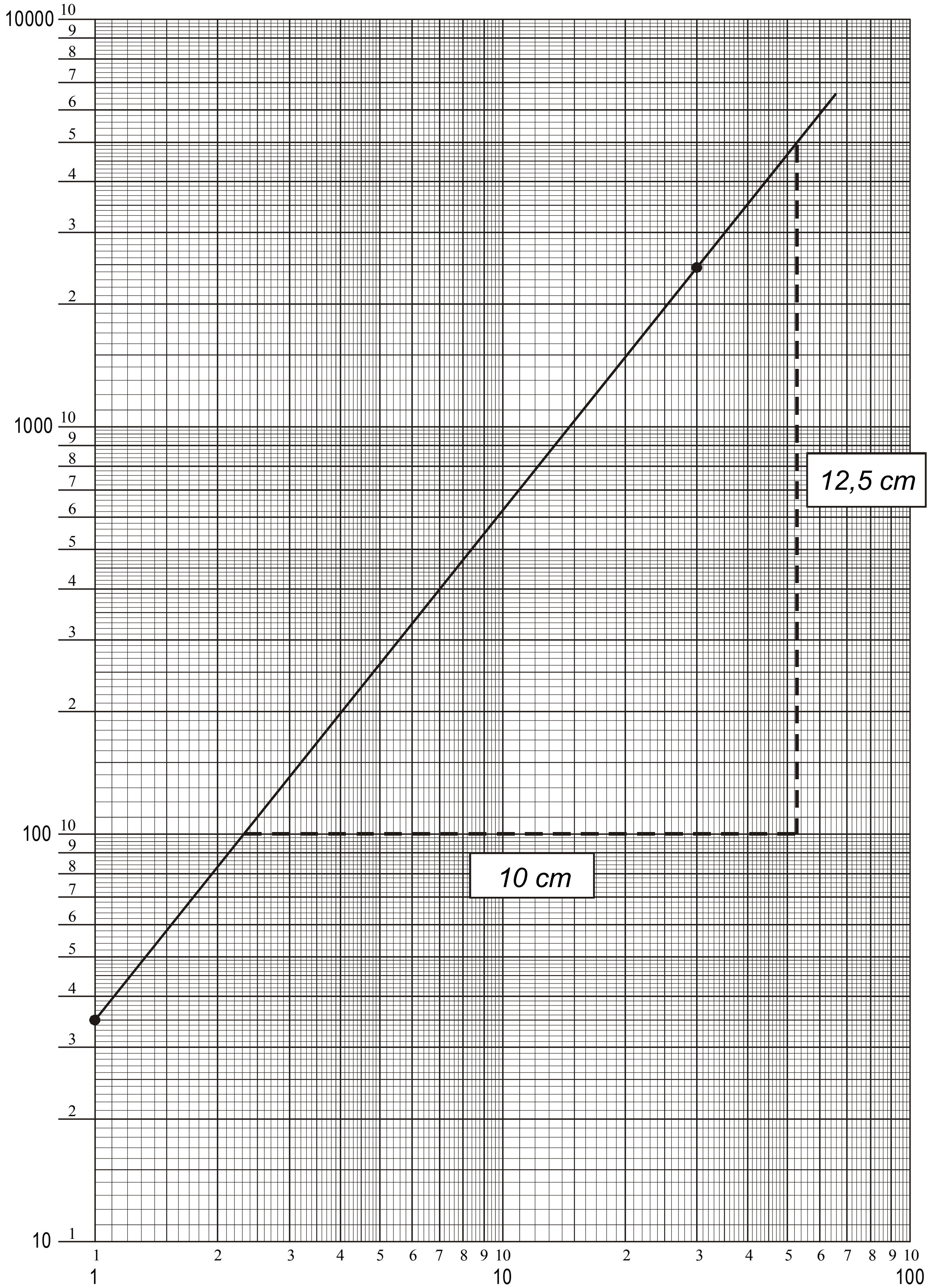
$$f(x) = 150 \Leftrightarrow 150 = 35 \cdot x^{1,25} \Leftrightarrow \frac{150}{35} = x^{1,25} \Leftrightarrow 4,2857 = x^{1,25}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt[1,25]{4,2857} = x \Leftrightarrow 3,2034 = x$$

Aflæsningerne er ikke markeret på grafen på næste side, som de normalt skal være ved skriftlige afleveringer!

□

Bemærkning 15

Hvis man har grafen for en potensudvikling afbildet på dobbeltlogpapir, og forskriften er ukendt, så kan man hurtigt få en god værdi for eksponenten a ved med en lineal at måle "hældningskoefficienten" for den retlinede graf, som den er tegnet på dobbeltlogpapir. At a kan bestemmes på denne måde fremgår direkte af formel (5) i sætning 8 og definitionen af en logaritmisk skala (Overvej!). På grafen på næste side er det vist, hvordan "hældningskoefficienten" fås til $\Delta y_{\text{cm}} / \Delta x_{\text{cm}} = 12,5\,\text{cm} / 10,0\,\text{cm} = 1,25$, hvilket stemmer overens med hvad vi allerede vidste fra eksempel 14, dvs. at $a = 1,25$.


10000
1000
100
10
1
10
100
12,5 cm
10 cm

Eksempel 16

Lad $f(x) = 2,5 \cdot x^{0,58}$ og $g(x) = 49 \cdot x^{-0,20}$. Løs ligningen $f(x) = g(x)$ ved beregning.

Løsning:

$$f(x) = g(x) \;\Leftrightarrow\; 2,5 \cdot x^{0,58} = 49 \cdot x^{-0,20} \;\Leftrightarrow\; \frac{x^{0,58}}{x^{-0,20}} \;=\; \frac{49}{2,5}$$

$$\Leftrightarrow\; x^{0,58-(-0,20)} = 19,6 \;\Leftrightarrow\; x^{0,78} = 19,6 \;\Leftrightarrow\; x = \sqrt[0,78]{19,6} \;=\; 45,4$$

hvor vi i tredje ensbetydende tegn har benyttet en velkendt potensregel! Løsningen er altså $x = 45,4$, som kan kontrolleres ved indsættelse i hver af de to forskrifter!

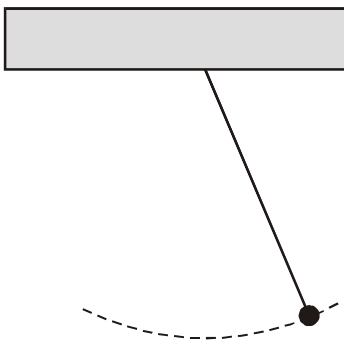
□

En potensiel model: Det matematiske pendul

Et matematisk pendul består af et punktformigt lod, som er fastgjort til enden af en masseløs snor. Svingningstiden T angiver den tid, det tager for loddet at svinge fra det øverste punkt i banen over til den anden side og tilbage igen. Hvis man ser bort fra enhver form for modstand, herunder vindmodstand, så kan man vise, at svingningstiden for ”uendeligt små” udsving er givet ved formlen:

$$T \;=\; 2\pi \cdot \sqrt{\frac{\ell}{g}} \tag{11}$$

hvor ℓ repræsenterer snorens længde og $g = 9,82\ \mathrm{m/s^2}$ er tyngdeaccelerationen. Vedrørende betingelsen ”uendeligt små” udsving, kan man regne med, at formlen holder med stor tilnærmelse, når det maksimale udsving er under 30 grader – med en fejl på under 2%. Selv om alle ovenstående forudsætninger aldrig kan være opfyldt i en virkelig situation, så viser det sig, at formlen ofte en rigtig god værdi for svingningstiden. Vigtigt er det dog, at loddets udstrækning er forholdsvis lille.



Der er en grund til, at vi betragter netop dette eksempel her. Det viser sig nemlig, at svingningstiden er en potensiel funktion af snorlængden. Dette indses ved at omskrive formel (11) til:

(12) $$T = 2\pi\cdot\sqrt{\frac{\ell}{g}} = 2\pi\cdot\frac{\sqrt{\ell}}{\sqrt{g}} = \frac{2\pi}{\sqrt{g}}\cdot\sqrt{\ell} = \frac{2\pi}{\sqrt{g}}\cdot\ell^{0,5} = b\cdot\ell^{0,5}$$

hvor $b = 2\pi\big/\sqrt{g}$ er en konstant, som ikke er vigtig her. Vi vil nu besvare nedenstående spørgsmål ved hjælp af teorien gennemgået i denne note:

a) Hvor mange procent vokser svingningstiden, når snorlængden vokser med 25%?
b) Hvor mange procent aftager svingningstiden, hvis snorlængden halveres?
c) Hvor mange procent skal snorlængden øges med, for at svingningstiden forøges med 20%?

Løsninger:

I vores tilfælde er $y = b\cdot x^{0,5}$. Eksponenten a er altså lig med 0,5 og x svarer til snorlængden ℓ, mens y svarer til svingningstiden T:

a) Vi gør brug af sætning 4, idet $r_1 = 25\% = 0,25$:

$$1+r_2 = (1+r_1)^a \;\Leftrightarrow\; 1+r_2 = (1+0,25)^{0,5} \;\Leftrightarrow\; 1+r_2 = 1,25^{0,5} \;\Leftrightarrow\; 1+r_2 = 1,118$$
$$\Leftrightarrow\; r_2 = 1,118-1 = 0,118 = 11,8\%$$

Svingningstiden vokser altså med 11,8%.

b) En halvering af snorlængden betyder en relativ tilvækst i x på –50%, hvilket betyder at $r_1 = -50\% = -0,5$. Vi benytter igen sætning 4:

$$1+r_2 = (1+r_1)^a \;\Leftrightarrow\; 1+r_2 = (1+(-0,50))^{0,5} \;\Leftrightarrow\; 1+r_2 = 0,50^{0,5} \;\Leftrightarrow\; 1+r_2 = 0,707$$
$$\Leftrightarrow\; r_2 = 0,707-1 = -0,293 = -29,3\%$$

Svingningstiden aftager altså med 29,3%.

c) Vi gør brug af sætning 4, idet $r_2 = 20\% = 0,20$:

$$1+r_2 = (1+r_1)^a \;\Leftrightarrow\; 1+0,20 = (1+r_1)^{0,5} \;\Leftrightarrow\; 1,20 = (1+r_1)^{0,5} \;\Leftrightarrow\; \sqrt[0,5]{1,20} = 1+r_1$$
$$\Leftrightarrow\; 1,44 = 1+r_1 \;\Leftrightarrow\; 1,44-1 = r_1 \;\Leftrightarrow\; 0,44 = r_1 \;\Leftrightarrow\; 44\% = r_1$$

Snorlængden skal altså forøges med 44% for at svingningstiden forøges med 20%.

□

Opgaver

Opgave 1

Tegn graferne for følgende potensielle funktioner i et almindeligt koordinatsystem eller eventuelt på grafregneren:

a) $f(x) = 0{,}4 \cdot x^{1{,}6}$

b) $f(x) = 4 \cdot x^{-0{,}5}$

Opgave 2

Lad $y = 560 \cdot x^{2{,}3}$.

a) Hvad sker der med y, hvis x ganges med 2?

b) Hvad skal man gange x med, for at y-værdien ganges med 1,8?

Opgave 3

Lad $y = 0{,}3506 \cdot x^{0{,}67}$.

a) Hvis x vokser med 17%, hvor mange procent vokser y da med?

b) Hvis x falder med 34%, hvor mange procent aftager y da med?

c) Hvor mange procent skal x vokse med, for at y fordobles?

Opgave 4

Lad $f(x) = 3{,}85 \cdot x^{1{,}2}$.

a) Hvor stor er den relative y-tilvækst, hvis den relative x-tilvækst er 45%?

b) Hvor stor en relativ x-tilvækst skal der til for at give en relativ y-tilvækst på 18%?

Opgave 5

Lad $y = 56 \cdot x^{-2{,}5}$

a) Hvor mange procent aftager y med, hvis x vokser med 27%?

b) Hvor mange procent vokser y med, hvis x halveres?

c) Hvor meget skal x øges med i procent for at y halveres?

Opgave 6

En potensiel funktion opfylder, at y øges med 53%, når x øges med 33%. Bestem en værdi for eksponenten a.

Opgave 7

Grafen for en potensiel funktion går igennem to punkter (x_1, y_1) og (x_2, y_2). Bestem forskriften for funktionen, når punkterne er:

a) (2; 4) og (4;8)
b) (3; 8) og (12;18)
c) (2; 60) og (8;5)
d) (1,8; 5,7) og (6,3; 9,5)
e) $(\sqrt{3}; 9)$ og $(2; 9\sqrt{3})$

Opgave 8

Grafen for en potensiel funktion går igennem to punkter (x_1, y_1) og (x_2, y_2). Bestem forskriften for funktionen, når punkterne er:

a) (2; 17) og (3; 30)
b) (4,7; 0,87) og (10,9; 0,067)
c) $(1{,}9; 70{,}4)$ og $(34{,}1; 106{,}9)$

Opgave 9

En potensiel funktion har en graf, som går igennem punktet (5,6). Desuden oplyses det, at den relative *y*-tilvækst er 60%, når *x* øges med 20%. Bestem en forskrift for funktionen.

Opgave 10

En potensiel funktion opfylder $f(12) = 0{,}6$. Desuden oplyses det, at *y* øges med 80%, hvis *x* øges med 32%. Bestem en forskrift for funktionen.

Opgave 11

Det oplyses om en potensiel udvikling, at *y* vokser med 15%, når *x* vokser med 10%. Hvor mange procent vokser *y* med, hvis *x* vokser med 20%?

Opgave 12

Lad $f(x) = 4 \cdot x^{1,7}$.

a) Bestem $f(1{,}9)$
b) Løs ligningen $f(x) = 17$
c) Hvis *x* øges med 21%, hvor meget øges funktionsværdien da med?
d) Hvis *x* reduceres med 34%, hvor meget reduceres funktionsværdien da med?

Opgave 13

Om en potensiel funktion oplyses det, at $f(6)=8$ og at funktionsværdien øges med 50%, når x øges med 70%. Bestem forskriften for funktionen.

Opgave 14

Om en potensiel funktion oplyses det, at $f(4{,}1)=5{,}8$ og $f(11{,}2)=30{,}7$. Indtegn punkterne på dobbeltlog-papir og løs følgende opgaver grafisk:

a) Bestem $f(8{,}7)$
b) Løs ligningen $f(x)=70$

Opgave 15

En potensiel funktion har en graf, som går igennem punkterne (17,100) og (230,10). Indtegn punkterne på dobbeltlog-papir og løs følgende opgaver grafisk:

a) Bestem $f(40)$
b) Løs ligningen $f(x)=5$
c) Benyt ”lineal-metoden” til at give en god værdi for a (se bemærkning 15).

Opgave 16

Lad $f(x)=12\cdot x^{3{,}4}$. Løs ligningen $f(x)=400$ ved beregning.

Opgave 17

Løs følgende ligninger ved beregning: $(x>0)$

a) $x^{7{,}6}=800$
b) $7{,}89\cdot x^{2{,}08}=15\cdot x^{1{,}65}$
c) $450\cdot x^{-4}=7\cdot x^{5{,}4}$
d) $34-7\cdot x^{-2}=123$

Opgave 18

Løs følgende ligninger ved beregning: $(x>0)$:

a) $(4x)^3=78\cdot x^{1{,}5}$
b) $7x\sqrt{x}=x^3$
c) $\dfrac{5}{x^{1{,}4}}=x$

Opgave 19

Lad $f(x)=24\cdot x^{1,4}$ og $g(x)=400\cdot x^{-0,6}$. Tegn graferne for de to funktioner på dobbelt-logpapir og brug det til at løse ligningen $f(x)=g(x)$ grafisk. Kontroller resultatet med grafregneren, hvis du har en sådan!

Opgave 20

Lad $f(x)=5\cdot 1,28^x$, $x\in R$ være en eksponentiel funktion og lad $g(x)=0,56\cdot x^{2,6}$, $x\in R_+$ være en potensiel funktion. Kan $f(x)=g(x)$ løses ved beregning, eller er man nødt til at løse den grafisk, fx med en lommeregner? Slut af med at løse ligningen.

Opgave 21 (Model)

En *terning* er en rektangulær kasse, hvor længde, bredde og højde er ens.

a) En terning har volumenet 3 m^3. Bestem sidelængden i terningen.
b) Sidelængden i en terning øges med 10% Hvor mange procent øges volumenet da?
c) Hvor mange procent skal man øge sidelængden med, for at fordoble volumenet?

Opgave 22 (Model)

Når man går på køreskole, så lærer man den velkendte regel, at *bremselængden vokser med kvadratet på hastigheden*. Det betyder, at hvis y er bremselængden og x er hastigheden, så gælder der $y=b\cdot x^2$ for et eller andet tal b.

a) Hvis farten vokser fra 100 km/t til 140 km/t, hvor mange procent er hastigheden så vokset? Hvor mange procent vil bremselængden dermed vokse?
b) Hvis farten sænkes fra 100 km/t til 80 km/t, hvor mange procent reduceres bremselængden da med?
c) Hvis farten sættes ned med 10%, hvor mange procent kortere bliver bremselængden da?
d) Hvis man højst kan tillade at bremselængden vokser med 50%, hvor mange procent kan man da højst tillade at lade farten vokse med?

Opgave 23 (Model)

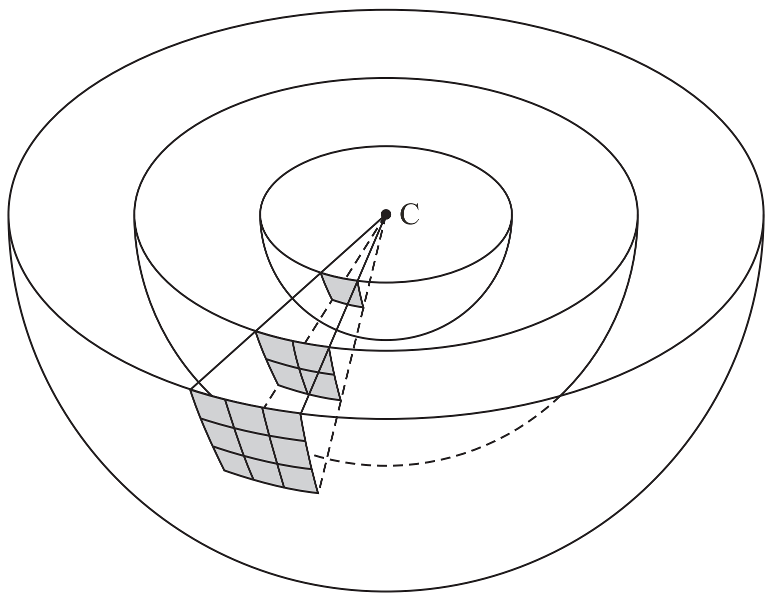
a) Når man nedkopierer en side fra en bog med 20% (i længden) på en kopimaskine, hvor meget reduceres arealet så med?
b) Når man nedkopierer fra A4 til A5 på en kopimaskine, så halveres arealet. Hvor meget er sidelængden blevet reduceret med i procent?

Opgave 24 (Model)

Når man har at gøre med en ganske lille radioaktiv kilde, der kan opfattes som punktformig, så gælder der den såkaldte *afstandskvadratlov*, som siger, at *strålingsintensiteten aftager med kvadratet på afstanden*. Hermed menes, at hvis x er afstanden til kilden og y er stråleintensiteten, så findes der en konstant b, så

$$y = b \cdot \frac{1}{x^2} = b \cdot x^{-2}$$

a) Hvad sker der med strålingsintensiteten, hvis man går ud i den dobbelte afstand fra kilden? (*Hjælp*: Hvad ganger du x med?)
b) Hvad sker der med strålingsintensiteten, hvis man øger afstanden med 50%?
c) Hvor mange gange så langt væk fra den radioaktive kilde skal man flytte sig, for at strålingsintensiteten aftager til $\frac{1}{1000}$ af det oprindelige niveau?
d) Strålingsintensitet betyder den strålingsenergi, som pr. sek. passerer igennem et areal på 1 m^2, anbragt vinkelret på stråleretningen. Enheden er derfor W/m^2. Prøv at forklare det logiske i afstandskvadratloven ved at kigge på nedenstående figur. Det kan antages, at kilden stråler lige meget ud i alle retninger!



Opgave 25 (Model)

Lydens hastighed i en gas kan fås af følgende formel:

$$v = k \cdot \sqrt{\frac{T}{M}}$$

hvor v er lydens hastighed regnet i m/s, T er temperaturen regnet i Kelvin, M er molarmassen regnet i $\mathrm{kg/mol}$ og k er en konstant, som kun afhænger af gassen.

a) Det oplyses, at for atmosfærisk luft er molarmassen lig med $0{,}02896\ \text{kg/mol}$ og at konstanten k er lig med $3{,}414\ (\text{J}/(\text{mol}\cdot\text{K}))^{1/2}$. Bestem lydens hastighed, når temperaturen er lig med 0°C. Husk at omregne temperaturen til Kelvin!

b) Samme spørgsmål, når temperaturen er 30°C.

c) Vis, at i atmosfærisk luft kan lydhastigheden v skrives som følgende funktion af temperaturen T i Kelvin: $v = 20{,}06\cdot T^{0{,}5}$, idet vi for overskuelighedens skyld glemmer enheden på b-leddet. (*Hjælp*: Sørg for at få konstanterne samlet til en konstant. Få desuden idéer fra eksemplet med det matematiske pendul fra hovedteksten).

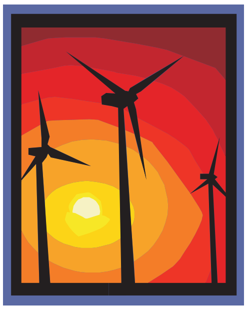
d) Hvor varm skal den atmosfæriske luft være, for at lydhastigheden bliver 370 m/s?

e) Hvis du har en grafregner, tegn så grafen for funktionen $v = 20{,}06\cdot T^{0{,}5}$ og løs samme spørgsmål som under d), denne gang ved hjælp af grafregneren.

f) Benyt udtrykket for v fra spørgsmål c) til at besvare følgende spørgsmål: Hvis temperaturen i Kelvin vokser med 10%, hvor mange procent vokser lydens hastighed i atmosfærisk luft da med?

g) (svær). Antag nu, at vi har at gøre med en vilkårlig gas. Argumenter for, at hvis temperaturen i gassen vokser fra 0°C til 30°C, så vil lydhastigheden deri vokse med samme procent, uanset hvilken gas, der er tale om (*Hjælp*: Argumenter udfra den første formel i denne opgave!).

Opgave 26 (Model)



Nedenstående tabel indeholder sammenhørende værdier mellem en vindmølles vingediameter og den effekt, som vindmøllen producerer.

Diameter (m)	20	29	47	86	120
Effekt (kW)	100	225	660	2500	5000

a) Eftervis, ved at tegne datapunkterne ind på et dobbeltlogaritmisk papir, at der er tale om en potensiel udvikling.

b) Bestem en forskrift for denne potensielle udvikling.

c) Hvor stor effekt vil en mølle med vingediameter 100 meter have, ifølge formlen?

d) Hvilken vingediameter vil give en effekt på 1000 kW?

e) Hvor mange procent øges effekten, hvis vingediameteren gøres 20% større?

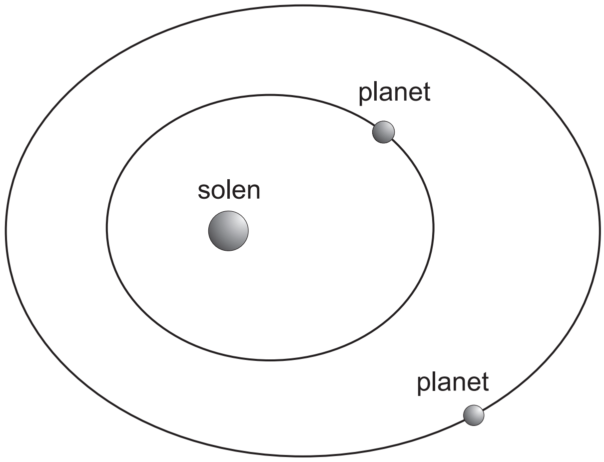
f) Hvor meget skal vingediameteren forøges med i procent, for at effekten fordobles?

Opgave 27 (Model)

Volumenet V af en kugle med radius r er givet ved formlen $V = \frac{4}{3}\cdot\pi\cdot r^3$, mens dens overfladeareal O er givet ved $O = 4\cdot\pi\cdot r^2$. Hvis radius øges med 10%, hvor meget er den relative tilvækst i volumen og overfladeareal da?

Opgave 28 (Model)

På grundlag af de observationer af himmelkuglens objekter, som Tycho Brahe så fremragende havde udført i slutningen af 1500-tallet, fremkom den tyske astronom *Johannes Kepler* med tre love om planeternes bevægelse omkring solen.



	
Tycho Brahe (1546 – 1601)	Johannes Kepler (1571 – 1630)

1. lov Enhver planet bevæger sig i en *ellipsebane* omkring solen med solen i brændpunktet for ellipsen.

2. lov Hastigheden i ellipsebanen varierer således, at en linje fra planeten til solen *overstryger* lige store arealer i lige store tidsrum.

3. lov Kvadratet på en planets omløbstid divideret med tredje potens af dens *middelafstand* (= ellipsens halve storakse) til solen er konstant inden for solsystemet.

Vi skal specielt se på den tredje lov, som oversat betyder, at omløbstiden T er en potensiel funktion af middelafstanden a.

a) Vis, at sammenhængen er givet ved $T = \text{konstant} \cdot a^{\frac{3}{2}}$.

Nedenfor er givet en tabel med sammenhørende værdier af omløbstid og middelafstand for planeterne i vort solsystem. Som enhed for middelafstand vælges *A*stronomisk *E*nhed, som er jordens middelafstand til solen (1 AE = 149,6 mill. km).

b) Eftervis Keplers 3. lov ved at afsætte punkter i et dobbeltlogaritmisk koordinatsystem. Bemærk, at middelafstandene (x-værdierne) strækker sig over 3 dekader og omløbstiderne (y-værdierne) over 4 dekader, så hvis du ikke limer to dobbeltlogaritmiske ark sammen, så kan punkterne ikke være på papiret. Hvis du ikke har lyst, eller ikke har materialer til at lime to ark sammen, så bør du i det mindste afsætte punkterne for de første 6 planeter på et enkelt ark.

c) Bestem en forskrift for potensudviklingen ved at vælge to punkter på den bedste rette linje igennem datapunkterne. Overvej hvorfor b-leddet omtrent eller præcist bliver lig med 1: har det noget med enhederne at gøre? Kan du i øvrigt sige god for Keplers lov?

d) Hvor stor skulle middelafstanden være for en tænkt planet med en omløbstid på 100 år?

e) Hvor mange procent vokser omløbstiden, når middelafstanden vokser med 15%?

f) Hvor mange procent skal middelafstanden reduceres med, for at omløbstiden halveres?

Planet	**Middelafstand (AE)**	**Omløbstid (år)**
Merkur	0,387	0,241
Venus	0,723	0,615
Jorden	1,000	1,000
Mars	1,524	1,881
Jupiter	5,203	11,862
Saturn	9,534	29,457
Uranus	19,182	84,009
Neptun	30,058	164,79
Pluto	39,44	247,68

Opgave 29 (Model)

Man anvender ofte en grov model til at vurdere en persons eventuelle overvægt: det såkaldte *Body Mass Index* (BMI), som er defineret ved udtrykket nedenfor.

$$b = \frac{m}{h^2} \qquad b: \text{BMI}, \;\; m: \text{vægt}, \;\; h: \text{højde}$$

SI-enheden for BMI er altså kg/m^2. Hvis vi regner vægten i kg og højden i m får vi følgende opdeling af vægtklasser alt efter hvor stort BMI er:

< 18,5	Undervægtig
18,5–24,9	Normalvægtig
25,0–29,9	Overvægtig
$\geq 30,0$	Svær overvægtig

En person A er 5% højere end en anden person B. Hvor mange procent kan A tillade sig at veje mere end B og alligevel have samme BMI?

Opgave 30 (Model)

Man har i biologien fundet en god matematisk model for sammenhængen mellem et menneskes overfladeareal BSA (*Body Surface Area*) som funktion af højden *h*, regnet i cm, og massen *m*, regnet i kg:

$$BSA = 0,007184 \cdot h^{0,725} \cdot m^{0,425} \quad \text{(DuBois \& DuBois ligningen)}$$

a) Bestem overfladearealet for en person, der vejer 65 kg og er 177 cm høj.
b) Bestem en værdi for dit eget overfladeareal.
c) Hvor mange procent øges en persons overfladeareal med, hvis personens masse øges med 20%?

Den empiriske formel er ikke så god for stærkt overvægtige personer. Så bruger man andre formler. Du kan eventuelt søge på nettet for andre alternative formler ...