Differentialligninger – nogle beviser og modeller

Vi skal i dette lille tillæg give elegante beviser for de fuldstændige løsninger til følgende typer af differentialligninger: $y' = k \cdot y$, $y' = b - a \cdot y$ og $y' = y \cdot (b - a \cdot y)$.

Sætning 1 (Eksponentiel vækst)

Givet en differentialligning på formen $y' = k \cdot y$, hvor k er en konstant. Den fuldstændige løsning til differentialligningen kan skrives på formen:

$$f(x) = c \cdot e^{k \cdot x}$$

hvor c er en arbitrær (vilkårlig) konstant.

Bevis: Vi vil først vise, at en funktion på formen $f(x) = c \cdot e^{k \cdot x}$ virkelig er en løsning til differentialligningen. Det gøres ved simpel indsættelse. Før vi kan gøre det, får vi brug for at udregne differentialkvotienten af funktionen f.

$$(1) \qquad y' = f'(x) = \left(c \cdot e^{k \cdot x}\right)' = c \cdot \left(e^{k \cdot x}\right)' = c \cdot k \cdot e^{k \cdot x}$$

hvor vi i tredje lighedstegn har udnyttet reglen om, at når man differentierer en konstant gange en funktion, så kan konstanten sættes udenfor. I fjerde lighedstegn er reglen om differentiation af en sammensat funktion udnyttet. Den *indre* funktion er i den forbindelse lig med $k \cdot x$. Vi kan nu indsætte udtrykkene for $y = f(x)$ og $y' = f'(x)$ i hver side af differentialligningen $y' = k \cdot y$:

$$(2) \qquad \begin{aligned} \text{Venstresiden: } y' &= c \cdot k \cdot e^{k \cdot x} \\ \text{Højresiden: } k \cdot y &= k \cdot c \cdot e^{k \cdot x} \end{aligned}$$

Vi ser tydeligt, at venstresiden og højresiden er ens, så $f(x) = c \cdot e^{k \cdot x}$ er virkelig en løsning til differentialligningen. Vi mangler at vise, at *alle* løsninger er på denne form for en eller anden konstant c. Så antag at f er en løsning til differentialligningen. Herefter foretager vi et smart trick ved at indføre en *hjælpefunktion* h ved følgende:

$$(3) \qquad h(x) = f(x) \cdot e^{-k \cdot x}$$

Lad os prøve at differentiere funktionen. Hertil bruges *produktreglen* for differentiation:

$$(4) \qquad \begin{aligned} h'(x) &= \left(f(x) \cdot e^{-k \cdot x}\right)' \\ &= f'(x) \cdot e^{-k \cdot x} + f(x) \cdot \left(e^{-k \cdot x}\right)' \\ &= f'(x) \cdot e^{-k \cdot x} + f(x) \cdot (-k) \cdot e^{-k \cdot x} \\ &= k \cdot f(x) \cdot e^{-k \cdot x} - f(x) \cdot k \cdot e^{-k \cdot x} \\ &= 0 \end{aligned}$$

I 4. lighedstegn har vi udnyttet, at funktionen f tilfredsstiller differentialligningen, dvs. at $f'(x) = k \cdot f(x)$. Differentialkvotienten af hjælpefunktionen er altså 0 i alle x-værdier!

Der er kun én funktion (defineret på et interval), som overalt har differentialkvotienten 0, og det er den konstante funktion. Lad os kalde konstanten *c*. Dermed har vi:

(5) $$h(x)=c \quad \Leftrightarrow \quad f(x)\cdot e^{-k\cdot x}=c \quad \Leftrightarrow \quad f(x)\cdot\frac{1}{e^{k\cdot x}}=c \quad \Leftrightarrow \quad f(x)=c\cdot e^{k\cdot x}$$

Dermed er det ønskede vist.

□

Sætning 2 (Forskudt eksponentiel vækst)

Givet en differentialligning på formen $y'=b-a\cdot y$, hvor $a\neq 0$ og b er konstanter. Den fuldstændige løsning til differentialligningen kan skrives på formen:

$$f(x)\;=\;\frac{b}{a}+c\cdot e^{-a\cdot x}$$

hvor $c\in R$ er en arbitrær (vilkårlig) konstant.

Bevis: Først vil vi vise den påstand, at differentialligningen $y'=b-a\cdot y$ kan omskrives til følgende differentialligning:

(6) $$\left(y-\frac{b}{a}\right)'\;=\;-a\cdot\left(y-\frac{b}{a}\right)$$

Det indses ved at regne på venstre side og højre side af lighedstegnet i (6):

Venstre side: $$\left(y-\frac{b}{a}\right)'\;=\;y'-\left(\frac{b}{a}\right)'\;=\;y'-0\;=\;y'$$

Højre side: $$-a\cdot\left(y-\frac{b}{a}\right)\;=\;-a\cdot y+b$$

Venstre side: Vi har benyttet en regneregel for differentiation samt at konstanten b/a differentierer til 0. Højre side: Vi har blot ganget ind i parentes. Alt i alt ser vi, at (6) ved disse omskrivninger reducerer til $y'=-a\cdot y+b$, som netop er den oprindelige differentialligning i sætning 2.

Det gode ved omskrivningen (6) er, at "indmaden" i parentesen tilfredsstiller en differentialligning af typen fra sætning 1. Sætter vi nemlig $z=y-b/a$, kan vi se, at (6) bliver til $z'=-a\cdot z$, netop en differentialligning af typen fra sætning 1. Vi ved allerede, at den fuldstændige løsning til denne er $z=c\cdot e^{-a\cdot x}$, hvor *c* er en arbitrær konstant. Hvis vi sætter ind hvad *z* er, får vi:

(7) $$z=c\cdot e^{-a\cdot x} \quad \Leftrightarrow \quad y-\frac{b}{a}\;=\;c\cdot e^{-a\cdot x} \quad \Leftrightarrow \quad y\;=\;\frac{b}{a}\;+\;c\cdot e^{-a\cdot x}$$

Hvorved det ønskede er vist.

□

Bemærk, at differentialligningen i sætning 2 har en løsning, som er en konstant funktion. For $c=0$ fås nemlig den konstante funktion $f(x)=\frac{b}{a}$.

Sætning 3 (Logistisk vækst)

Givet en differentialligning på formen $y' = y \cdot (b - a \cdot y)$, hvor a og b er reelle konstanter med $a \neq 0$. Den fuldstændige løsning til differentialligningen er følgende:

$$f(x) = 0 \quad \text{og} \quad f(x) = \frac{\frac{b}{a}}{1 + c \cdot e^{-b \cdot x}}$$

hvor $c \in R$ er en arbitrær konstant.

Bevis: For det første ser man hurtigt ved indsættelse på højre og venstre side i den logistiske differentialligning $y' = y \cdot (b - a \cdot y)$, at funktionen $f(x) = 0$ er en løsning. I søgen efter andre løsninger vil vi herefter antage, at $f(x) \neq 0$ for alle x. Påstanden er nu, at den logistiske differentialligning kan omskrives til følgende differentialligning:

$$(8) \qquad \left(\frac{1}{y}\right)' = a - b \cdot \left(\frac{1}{y}\right)$$

Vi viser denne påstand ved først at regne på venstre og højre side af lighedstegnet i (8):

Venstre side: $\left(\frac{1}{y}\right)' = \left(y^{-1}\right)' = -1 \cdot y^{-2} \cdot y' = -y^{-2} \cdot y'$

Højre side: $a - b \cdot \left(\frac{1}{y}\right) = a - \frac{b}{y}$

Venstre side: Vi bemærker, at vi har at gøre med en *sammensat* funktion og skal derfor anvende reglen for differentiation af en sammensat funktion. Inden vi differentierer, omskriver vi lige $1/y$ til y^{-1}. Bemærk at y' efter det andet lighedstegn svarer til den indre funktion differentieret! Med omskrivningerne af venstre og højre side i (8) får vi:

$$(8) \quad \Leftrightarrow \quad -y^{-2} \cdot y' = a - \frac{b}{y} \quad \Leftrightarrow \quad y' = -y^2 \cdot \left(a - \frac{b}{y}\right) \quad \Leftrightarrow \quad y' = y \cdot (b - a \cdot y)$$

2. ensbetydende: Vi har ganget med $-y^2$ på begge sider af lighedstegnet. 3. ensbetydende: Skriv $-y^2$ som $y \cdot (-y)$ og gang $-y$ ind i parentesen. Dermed har vi vist, at (8) er ensbetydende med den oprindelige differentialligning. Sættes $z = 1/y$ ser vi, at (8) bliver til $z' = a - b \cdot z$, som er en differentialligning af typen behandlet i sætning 2. Her er rollen af a og b blot ombyttet. Vi konkluderer, at den fuldstændige løsning $z = g(x)$ er på formen $g(x) = a/b + c_1 \cdot e^{-b \cdot x}$ for en arbitrær konstant c_1. Men vi skal jo tilbage til en løsning $y = f(x)$ til differentialligningen (8):

$$(9) \qquad \begin{aligned} & g(x) = \tfrac{a}{b} + c_1 \cdot e^{-b \cdot x} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{f(x)} = \tfrac{a}{b} + c_1 \cdot e^{-b \cdot x} \quad \Leftrightarrow \\ & f(x) = \frac{1}{\tfrac{a}{b} + c_1 \cdot e^{-b \cdot x}} = \frac{\tfrac{b}{a} \cdot 1}{\tfrac{b}{a} \cdot \left(\tfrac{a}{b} + c_1 \cdot e^{-b \cdot x}\right)} = \frac{\tfrac{b}{a}}{1 + \tfrac{b}{a} \cdot c_1 \cdot e^{-b \cdot x}} \end{aligned}$$

hvor vi i 2. lighedstegn nederst forlænger brøken med b/a. Hvis vi kalder $c = \frac{b}{a} \cdot c_1$ kan vi se, at vi har vist det ønskede. NB! Når c_1 gennemløber alle reelle tal, vil den arbitrære konstant c også gøre det. □

Bemærkning 4

Strengt taget har vi ikke undersøgt for løsninger, som måtte være 0 for nogle x-værdier og forskellig fra nul for andre x-værdier. I teorien for ikke-lineære 1. ordens differentialligninger, som den logistiske differentialligning hører ind under, kan man imidlertid vise, at der under visse forudsætninger "lokalt set" eksisterer en løsningskurve igennem ethvert punkt i planen, samt at denne løsning er *entydig*. Da vi allerede har den løsning, som er identisk 0 på hele x-aksen, kan der altså ikke være flere løsningskurver, som rammer x-aksen – på grund af entydigheden. Nævnte sætning er alt for svær til at blive gennemgået i gymnasiet.

Bemærkning 5

Udover løsningen $f(x)=0$ til den logistiske differentialligning, er der også en anden løsning, som er konstant, nemlig $f(x)=\frac{b}{a}$, som fremkommer ved at sætte $c=0$.

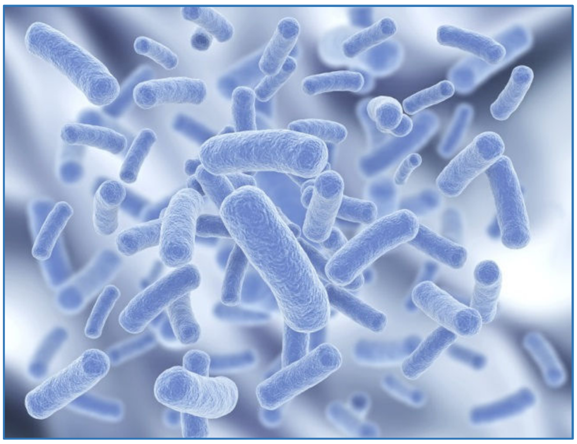
Modeller

Ikke overraskende er de ovennævnte tre modeller interessante fordi de repræsenterer *generelle* egenskaber, som kan genfindes i mange praktiske situationer. Differentialligningerne udtrykker noget om *øjebliksshastigheden* til ethvert tidspunkt. I de fleste anvendelser er den variable tiden t fremfor x.

Eksempel 6

Differentialligningen $y'=k\cdot y$ kan fortolkes som at *øjebliksshastigheden* y' til ethvert tidspunkt t er *proportional* med størrelsen af y. Denne model kommer i sin ideelle form til anvendelse i væksten af en *population*. Det er naturligt at antage, at hastigheden, hvormed for eksempel en bakteriekultur vokser, er proportional med populationens størrelse selv. Hvis der er dobbelt så mange bakterier, så får de også dobbelt så mange "børn" lidt løst sagt. Vi benytter også betegnelsen konstant *relativ vækst* fremfor konstant *absolut vækst*, hvor udviklingen ville have været *lineær*. Ifølge sætning 1 er en konstant relativ vækst det samme som en *eksponentiel vækst*. Lad os se på et eksempel.

Antag at antallet af bakterier $n(t)$ til tiden t (enhed: timer) adlyder differentialligningen $n'(t)=0{,}3\cdot n(t)$. Det oplyses, at der fra begyndelsen er 5000 bakterier.



a) Bestem et udtryk for antallet af bakterier til tidspunktet t.

b) Bestem den øjebliksshastighed, hvormed populationens størrelse ændrer sig, til tidspunktet 3 timer.

c) Hvor stor er væksthastigheden til det tidspunkt, hvor der er 20000 bakterier?

Løsning:

a) Ifølge sætning 1 ses det, at løsningen til differentialligningen $n'(t) = 0{,}3 \cdot n(t)$ er på formen $n(t) = c \cdot e^{0{,}3 \cdot t}$, hvor c er en arbitrære konstant. Vi benytter *begyndelsesbetingelsen* til at fastlægge den arbitrære konstant c:

(10) $$n(0) = 5000 \quad \Leftrightarrow \quad c \cdot e^{0{,}3 \cdot 0} = 5000 \quad \Leftrightarrow \quad c = 5000$$

Altså er $n(t) = 5000 \cdot e^{0{,}3 \cdot t}$ et udtryk for populationens størrelse til tiden t.

b) Øjeblikshastigheden, hvormed populationen vokser, fås ved at differentiere:

(11) $$n'(t) \;=\; \left(5000 \cdot e^{0{,}3 \cdot t}\right)' \;=\; 5000 \cdot 0{,}3 \cdot e^{0{,}3 \cdot t} \;=\; 1500 \cdot e^{0{,}3 \cdot t}$$

Til tidspunktet 3 timer fås:

(12) $$n'(3) \;=\; 1500 \cdot e^{0{,}3 \cdot 3} \;=\; 3689{,}4$$

Til tidspunktet $t = 3$ timer er øjeblikshastigheden, hvormed populationen vokser, altså lig med 3689 bakterier pr. time. Bemærk at det *ikke* betyder, at der efter en time er 3689 bakterier flere, for øjehastigheden ændrer sig hele tiden!

c) Man kunne her naturligvis vælge først at bestemme det tidspunkt, hvor populationen er oppe på 20000 bakterier ved at løse ligningen $n(t) = 20000$ og derefter sætte løsningen for t ind i udtrykket for hastigheden (11). Der er imidlertid en meget nemmere måde at gøre det på, nemlig ved at bruge differentialligningen direkte!

(13) $$n' = 0{,}3 \cdot n \;=\; 0{,}3 \cdot 20000 \;=\; 6000$$

idet vi af pædagogiske årsager her har undertrykt den variable t. Vi konkluderer, at når populationen er nået op på 20000 bakterier, så er øjeblikshastigheden, hvormed bakterierne formerer sig, lig med 6000 bakterier/time.

□

Forsøg: Newtons afkølingslov afprøves

Eksempel 7

Et godt eksempel på anvendelse af differentialligningen for den *forskudte eksponentielle vækst* fra sætning 2 er ved afkøling af kaffe. Ifølge *Newtons afkølingslov* vil temperaturen $T(t)$ af kaffen i en kop til tiden t adlyde følgende differentialligning:

(14) $$\frac{dT}{dt} = -k \cdot (T - T_{omg})$$

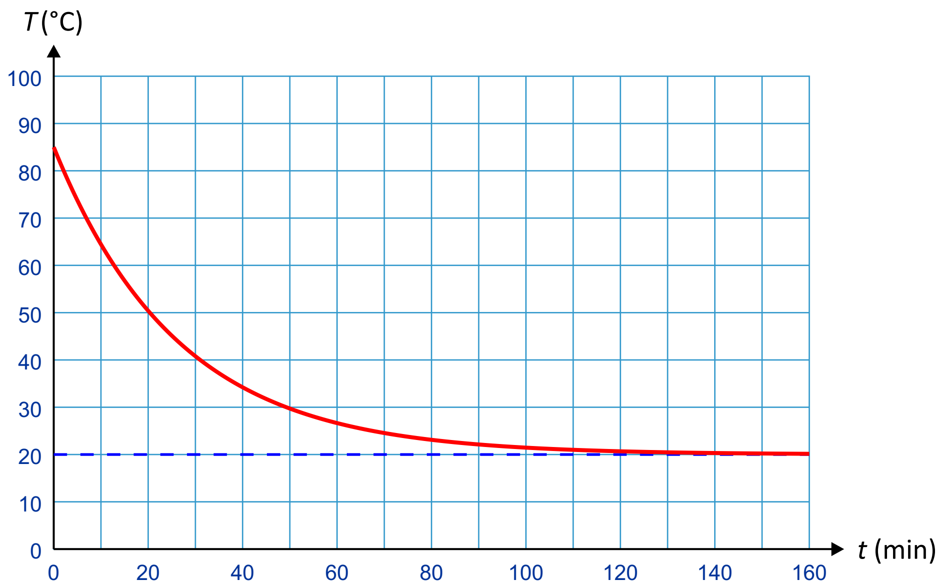
hvor k er en konstant og T_{omg} er omgivelsernes temperatur. Differentialligningen udtrykker, at hastigheden, hvormed kaffens temperatur ændrer sig, er *proportional* med forskellen mellem kaffens temperatur og omgivelsernes temperatur. Dette lyder umiddelbart meget fornuftigt, idet man må forvente, at temperaturen aftager hurtigere, når kaffens temperatur er meget over omgivelsernes temperatur fremfor når kaffens temperatur er tæt på omgivelsernes temperatur. Ved at gange ind i parentesen i (14) ser man, at der virkelig er tale om en differentialligning af typen $y' = b - a \cdot y$. Her svarer b til $k \cdot T_{omg}$ og a til k og y naturligvis til T. Detaljerne gives ikke her, da de er led i en projektopgave. Sætning 2 giver med oversættelserne følgende fuldstændige løsning til (14):

(15) $$T(t) = c \cdot e^{-k \cdot t} + T_{omg}$$

For at bestemme den arbitrære konstant indsættes begyndelsesbetingelsen, at kaffens temperatur til tidspunktet $t = 0$ er T_0. Det overlades igen til læseren at vise, at det giver $c = T_0 - T_{omg}$. Når denne værdi for c indsættes i (15) fås det endelige udtryk for løsningen til differentialligningen med begyndelsesbetingelser:

(16) $$T(t) = (T_0 - T_{omg}) \cdot e^{-k \cdot t} + T_{omg}$$

Konstanten k afhænger blandt andet af hvor godt koppen er isoleret. Lad os tegne grafen for løsningen i tilfældet, hvor kaffens starttemperatur er $T_0 = 85°\text{C}$, hvor omgivelsernes temperatur er $T_{omg} = 20°\text{C}$ og $k = 0{,}038\ \text{min}^{-1}$.



Som ventet ser vi, at kaffens temperatur aftager mest i begyndelsen, mens den stadig er meget varm. Når tiden går mod uendelig vil kaffens temperatur nærme sig *asymptotisk* til omgivelsernes temperatur. Det er markeret med en vandret stiplet linje ud for 20°C. Matematisk siger vi, at $T(t) \to 20$ for $t \to \infty$, og $y = 20$ siges at være en *vandret asymptote* til grafen. I Maple kan grænseværdien bestemmes med kommandoen *lim*, hvis forskriften for funktionen i forvejen er defineret:

$$\boxed{\lim_{t \to \infty} T(t) = 20.}$$

Den logistiske differentialligning

Før vi går videre med at kigge på konkrete logistiske vækster, er det hensigtsmæssigt at bemærke, at de logistiske vækster forekommer i forskellige varianter. Vi skal nævnte tre af dem. Der er vel at mærke tale om præcist de *samme* vækster. Der er blot forskel på de indgående konstanter. Den første variant har vi fra sætning 3. De næste to fås ved at indføre størrelsen $M = \frac{b}{a}$ og så ellers rokere lidt rundt. I tabellen nedenfor er de tre varianter angivet sammen med udtrykkene for de fuldstændige løsninger.

Logistiske differentialligning	Den fuldstændige løsning	Bæreevne
$y' = y \cdot (b - a \cdot y)$	$f(x) = 0$ og $f(x) = \dfrac{\frac{b}{a}}{1 + c \cdot e^{-b \cdot x}}$	$\frac{b}{a}$
$y' = a \cdot y \cdot (M - y)$	$f(x) = 0$ og $f(x) = \dfrac{M}{1 + c \cdot e^{-a \cdot M \cdot x}}$	M
$y' = b \cdot y \cdot \left(1 - \dfrac{y}{M}\right)$	$f(x) = 0$ og $f(x) = \dfrac{M}{1 + c \cdot e^{-b \cdot x}}$	M

Størrelsen M betegnes undertiden *bæreevnen* (på engelsk: *Carrying Capacity*), mens b benævnes *den indre vækstrate*. Den er et mål for, hvor hurtigt funktionsværdien nærmer sig bæreevnen. Normalt antages a, b og M positive.

Vi har tidligere gennemført et matematikprojekt, hvor vi har studeret den *logistiske vækst* i forbindelse med differentialregning. Dengang blev funktionens forskrift indført uden nogen begrundelse for, hvorfor netop denne forskrift skulle være specielt interessant. Teorien om differentialligninger kan imidlertid kaste mere lys over den sag. i Den forbindelse er det mest hensigtsmæssigt at betragte den tredje variant ovenfor.

(17) $$y' = b \cdot y \cdot \left(1 - \frac{y}{M}\right)$$

I forhold til differentialligningen for den eksponentielle vækst, $y' = b \cdot y$, er der ganget en faktor $(1 - y/M)$ på højresiden. Faktoren afviger fra 1 ved at have et *dæmpende led*, y/M. Det har den virkning, at jo større y bliver, jo mindre bliver faktoren, og jo mere vil hastigheden y' dermed blive dæmpet i forhold til, hvis der var tale om en eksponentiel vækst. Når y nærmer sig til *bæreevnen M*, vil faktoren nærme sig til 0, hvorfor hastigheden ligeledes vil nærme sig til 0. Det passer fint med, at løsningen vil nærme sig til bæreevnen, når x går mod uendelig, eller sagt med matematik:

(18) $$\lim_{x\to\infty} f(x) = M$$

Størrelsen b kaldes *den indre vækstrate*. Den fortæller noget om, hvor hurtigt y nærmer sig til M. Det er på tide med et eksempel.

□

Eksempel 8

Der sættes 100 fisk af en bestemt art ud i en stor sø i Danmark. Antag at populationens udvikling adlyder den logiske differentialligning (17) med indre vækstrate $b = 0{,}0416$ og med bæreevne $M = 3200$.

a) Bestem et udtryk for antallet af fisk som funktion af tiden t i dage.
b) Til hvilket tidspunkt vokser populationen af de pågældende fisk kraftigst?
c) Bestem den øvre grænse for fisk i søen.

Løsning:

a) Ifølge tabellen med de fuldstændige løsninger til de tre varianter af den logistiske differentialligning er den søgte løsning til (17) på formen:

$$n(t) \;=\; \frac{M}{1+c\cdot e^{-b\cdot t}} \tag{19}$$

hvor funktionen dog benævnes n og den variable t, regnet i dage. Vi indsætter først værdierne for parametrene b og M i (19) og udnytter derefter begyndelsesbetingelsen til at bestemme den arbitrære konstant c.

$$n(0)=100 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{3200}{1+c\cdot e^{-0{,}0416\cdot 0}} = 100 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{3200}{1+c} = 100 \quad\Leftrightarrow\quad c=31 \tag{20}$$

Indsættes værdien for c fås endeligt:

$$n(t) = \frac{3200}{1+31\cdot e^{-0{,}0416\cdot t}} \tag{21}$$

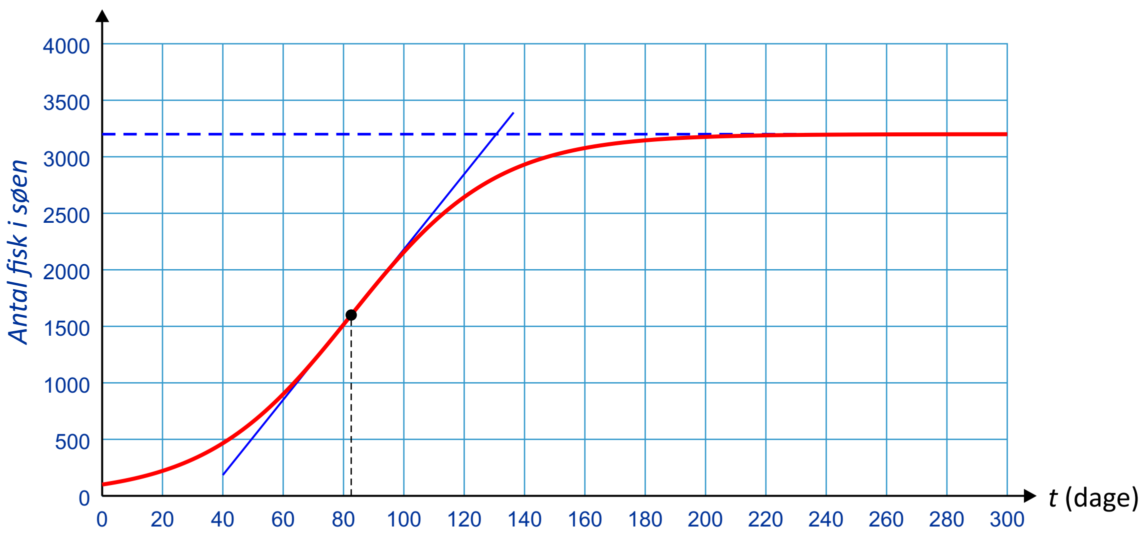
som er det ønskede udtryk for populationens størrelse som funktion af tiden.

b) Her er det hastigheden $n'(t)$, som skal maksimeres, ikke $n(t)$. Opgaven kan klares ved at sætte $v(t)=n'(t)$ og foretage en funktionsundersøgelse af n. Detaljerne overlades til læseren. Det er klart, at funktionen i det ønskede punkt opfylder $v'(t)=0$, dvs. $n''(t)=0$. Man siger, at funktionen $n(t)$ har en *skrå vendetangent* i det søgte punkt! Svaret i opgaven er i øvrigt $t=82{,}548$ dage. Senere, i Bemærkning 10, skal vi se, hvordan man kan løse dette spørgsmål enklere!

c) Her lader vi tiden gå mod uendelig. Da $e^{-0{,}0416\cdot t}\to 0$ for $t\to\infty$, vil nævneren i brøken i (21) nærme sig til 1, hvorfor hele brøken vil nærme sig til 3200:

$$n(t) \;=\; \frac{3200}{1+31\cdot e^{-0{,}0416\cdot t}} \;\to\; \frac{3200}{1+31\cdot 0} \;=\; \frac{3200}{1} \;=\; 3200 \quad\text{for } t\to\infty \tag{22}$$

Den øvre grænse af fiskebestanden er altså 3200, hvilket vi egentligt godt vidste i forvejen, da det var bygget ind i modellen. Lad os til slut tegne grafen for populationens størrelse som funktion af tiden.



Grafen har en vandret asymptote i $y = 3200$, som afspejler påstanden om at populationens størrelse nærmer sig til 3200, når tiden nærmer sig til uendelig. Endvidere er punktet, hvor den største hastighed antages, indtegnet, foruden tangenten til grafen i punktet.

□

Sætning 9

For en voksende logistisk vækst, hvor $b > 0, M > 0$ forekommer den største væksthastighed, netop når funktionsværdien (eller populationen) har nået halvdelen af bæreevnen, altså $\frac{1}{2}M$. Den maksimale hastigheds størrelse er givet ved:

$$v_{\max} = \tfrac{1}{4} \cdot b \cdot M$$

Bevis: Det nemmeste er at betragte differentialligningen (17) og gange ind i parentesen:

$$y' \;=\; b \cdot y \cdot \left(1 - \frac{y}{M}\right) \;=\; b \cdot y - \frac{b}{M} \cdot y^2$$

Væksthastigheden y' er altså et andengradspolynomium i y med følgende koefficienter, (hvor vi benytter store bogstaver for koefficienterne):

$$A = -\frac{b}{M}, \quad B = b \;\text{ og }\; C = 0$$

Formlen for toppunktet for en parabel er som bekendt givet ved: $T = \left(-\frac{B}{2A}, -\frac{D}{4A}\right)$.

$$-\frac{B}{2A} \;=\; -\frac{b}{-2 \cdot \dfrac{b}{M}} \;=\; \tfrac{1}{2} \cdot b \cdot \frac{M}{b} \;=\; \tfrac{1}{2} M$$

er altså den værdi af y, som giver den største væksthastighed. Den maksimale væksthastighed kan da findes ved at udregne toppunktets 2. koordinat. Først diskriminanten:

$$D \;=\; B^2 - 4 \cdot A \cdot C \;=\; b^2 - 4 \cdot \left(-\frac{b}{M}\right) \cdot 0 \;=\; b^2$$

hvorefter vi kan udregne 2. koordinaten:

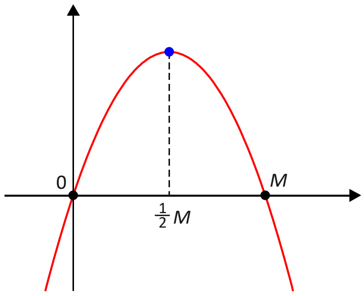
$$-\frac{D}{4A} \;=\; -\frac{b^2}{4 \cdot \left(-\dfrac{b}{M}\right)} \;=\; \tfrac{1}{4} \cdot b^2 \cdot \frac{M}{b} \;=\; \tfrac{1}{4} \cdot b \cdot M$$

Vi har dermed vist, at den maksimale væksthastighed er givet ved $v_{\max} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot M$, og at den antages, når $y = \frac{1}{2} M$.

□

Bemærkning 10

Der er også en hurtig måde at vise, at den maksimale væksthastighed opnås, når $y = \frac{1}{2} M$. I beviset for sætning 9 anvendte vi toppunktsformlen for en parabel. Man kan imidlertid også udnytte, at toppunktet altid ligger midt mellem rødderne for andengradspolynomiet (forudsat at polynomiet har rødder). Rødderne fås ved brug af nulreglen:



$$b\cdot y\cdot\left(1-\frac{y}{M}\right)=0 \quad\Leftrightarrow\quad y=0 \;\vee\; 1-\frac{y}{M}=0$$

$$\Leftrightarrow\quad y=0 \;\vee\; y=M$$

□

Bemærkning 11 (Eksempel 7 igen)

Vi kunne med fordel have benyttet sætning 9 til at besvare spørgsmål b) i eksempel 8. Her var $b=0{,}0416$ og $M=3200$. Den største væksthastighed opnår derfor, når populationens størrelse er $\frac{1}{2}M=\frac{1}{2}\cdot 3200=1600$. Tidspunktet for, hvornår det sker, kan da udregnes ved at løse en ligning:

$$n(t)=1600 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{3200}{1+31\cdot e^{-0{,}0416\cdot t}}=1600 \quad\Leftrightarrow\quad t=82{,}5$$

Det maksimale væksthastighed opnås derfor efter 82,5 dage. Den maksimale væksthastighed kan vi også finde:

$$v_{\max}=\tfrac{1}{4}\cdot b\cdot M=\tfrac{1}{4}\cdot 0{,}0416\cdot 3200=33{,}28$$

altså en maksimal væksthastighed af populationen på 33,3 fisk/dag.

□

Linjeelementer

Vi skal indføre et nyt begreb her, nemlig et linjeelement:

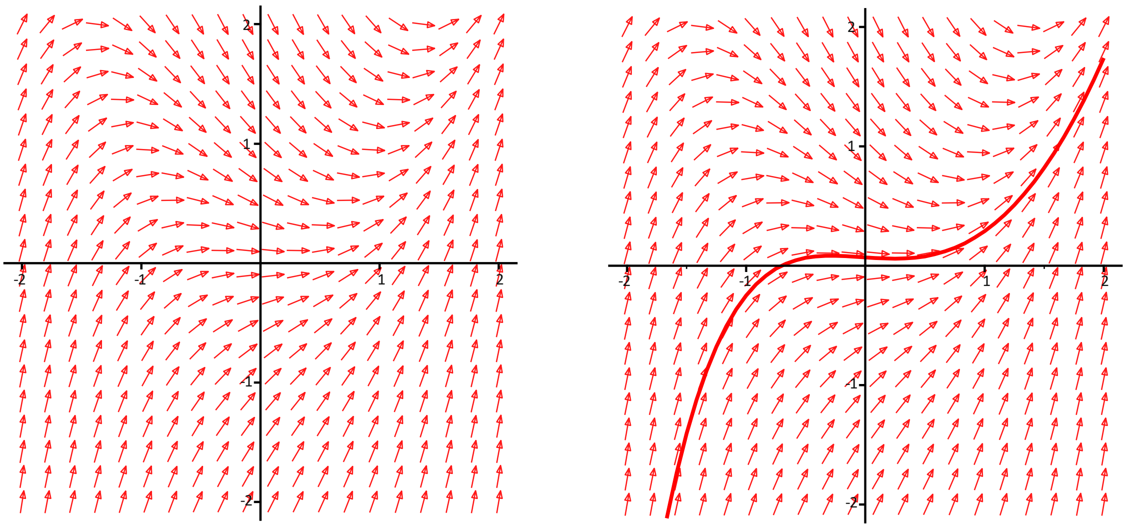
Definition 12

Hvis det om en differentiabel funktion *f* gælder, at $f(x_0)=y_0$ og $f'(x)=a$, så siges *f* at gå igennem *linjeelementet* $(x_0,y_0;a)$.

Af definitionen ser vi, at funktionen går igennem linjeelementet $(x_0,y_0;a)$ netop når grafen for *f* går igennem punktet (x_0,y_0) og a er hældningen af tangenten til grafen i dette punkt. Betragt nu en differentialligning på formen:

(23) $$\frac{dy}{dx}=g(x,y)$$

En funktion *f* er en løsning til denne differentialligning, hvis og kun hvis *f* går igennem ethvert (relevant) linjeelement på formen $(x,y,g(x,y))$. Man kan nu forestille sig, at man i planen tegner et helt netværk af punkter (x,y) og i ethvert af disse udvalgte punkter tegner et lille linjestykke med hældning $g(x,y)$. Det kan se ud som på figuren næste side til venstre:



Det er lidt som jernfilspåner påvirket af en stangmagnet. Det er vigtigt at bemærke, at linjeelementerne hører til differentialligningen. At bestemme en løsning til differentialligningen svarer da geometrisk set til at finde en løsningskurve, hvis tangenthældning i ethvert punkt er den, som pilene indikerer. Et eksempel på en løsningskurve er vist på den højre del af figuren ovenfor. Et diagram med linjeelementer for en differentialligning kan altså være med til at give et fingerpeg om, hvordan løsningerne til differentialligningen ser ud.

Eksempel 13 (Linjeelement)

Diagrammet med linjeelementer ovenfor stammer fra differentialligningen

(24) $$y' = x^2 - y$$

Linjeelementet i for eksempel punktet $(x, y) = (1, -1)$ beregnes således: Værdierne for x og y indsættes blot på højre side af (24), hvilket giver $x^2 - y = 1^2 - (-1) = 2$. Det giver linjeelementet $(1, -1; 2)$. Kigger man på diagrammet, kan man godt ane, at pilen i $(1, -1)$ har en hældning på 2. Heldigvis har man CAS-værktøj til at tegne diagrammer med linjeelementer. At gøre det manuelt ville være et alt for stort arbejde!

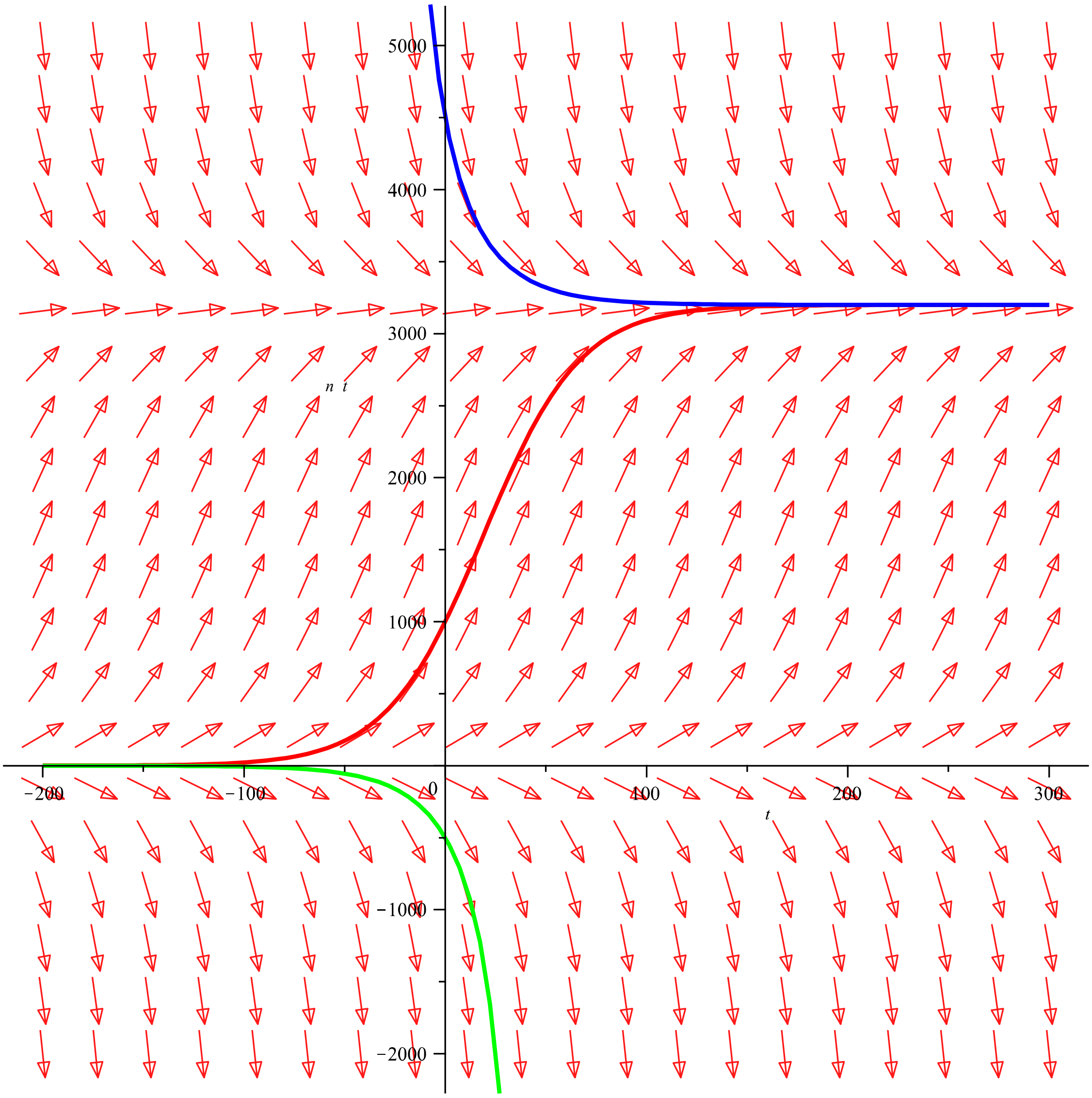
Bemærkning 14 (Eksempel 7 igen)

Vi er endnu ikke helt færdige med den logistiske differentialligning fra eksempel 7. Den kan nemlig være med til at kaste lys over flere sider af den logistiske differentialligning generelt set. Differentialligningen hørende til udviklingen af fiskepopulationen i eksempel 7 er ifølge (17), med værdierne 0,0416 og 3200 for henholdsvis b og M, følgende:

(25) $$n' = 0{,}0416 \cdot n \cdot \left(1 - \frac{n}{3200}\right)$$

hvor vi dog kalder den involverede funktion for n i stedet for y. Differentialligningen giver anledning til det diagram med linjeelementer, som er vist på næste side. I diagrammet er også indtegnet løsninger, som vi skal kommentere i det følgende. Den grønne kurve er teknisk set en løsning til differentialligningen (25), men den er ikke relevant i forbindelse med populationers vækst, fordi funktionsværdierne er negative. Den blå løsningskurve er derimod ikke urealistisk. Her starter populationen blot med en størrelse, som er *større* end bæreevnen M. Vi ser da også, at populationen aftager mod M, som tiden går. Den røde løsningskurve er den mest anvendte, da den viser, hvorledes en population, som fra start er *mindre* end bæreevnen, udvikler sig. Her vil populationens størrelse vokse mod M.

En anden ting, som er værd at nævne er, at man godt kan komme ud for, at sætning 9 ikke bliver relevant i en konkret anvendelse. Det kan jo være, at populationen fra start havde en størrelse, som er større end $\frac{1}{2}M$. I det tilfælde vil den største væksthastighed være starttidspunktet. Sætning 9 udtaler sig om en hel løsningskurve, mens konkrete anvendelser kun vil involvere en del af løsningskurven.



□

Bemærkning 15 (Om modeller)

Det skal siges, at løsningerne til den logistiske differentialligning naturligvis forudsætter, at populationen virkelig adlyder den logistiske ligning. Det kan man langt fra gå ud fra i virkeligheden, og eksempel 7 med en population af fisk er da også konstrueret. I modeller søger man at tage en række forhold i betragtning, men det er umuligt at tage højde for alle forhold. Kunsten ved at modellere er netop at tage højde for alle de væsentligste forhold, men stadig holde antallet af parametre eller variable nede på et acceptabelt niveau, så man kan regne med det, selv på en computer …