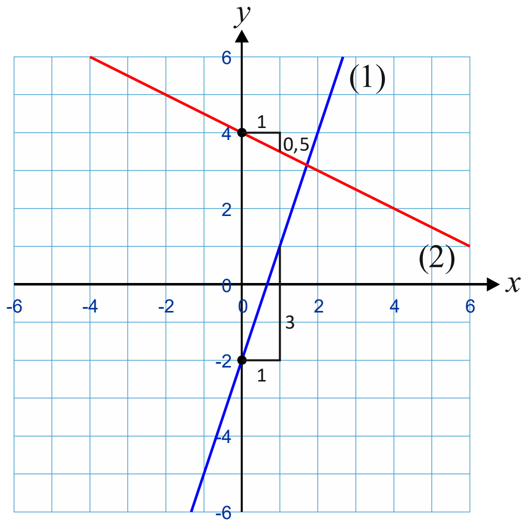



Opgaver i Lineære funktioner og modeller

Teknik

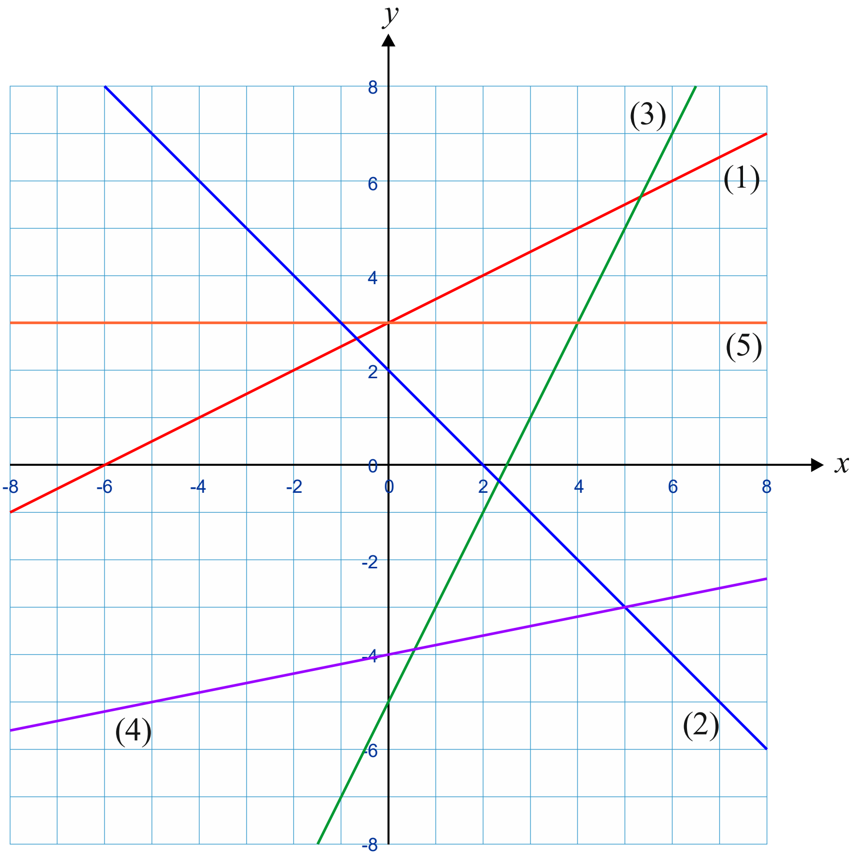
Eksempel 1 (Aflæse forskrift fra graf)

Den lineære funktion med grafen (1) til højre må have forskriften $f(x)=3x-2$ fordi grafen skærer y-aksen i –2 og fordi der er en y-tilvækst på 3, hver gang x vokser med 1. Tilsvarende har den lineære funktion med graf (2) forskriften $f(x)=-\frac{1}{2}x+4$, fordi grafen skærer y-aksen i 4 og y-tilvæksten er $-\frac{1}{2}$, hver gang x vokser med 1.



Opgave 2 (Aflæse forskrift fra graf)

Aflæs forskrifterne for hver af de fem lineære funktioner med graferne nedenfor.

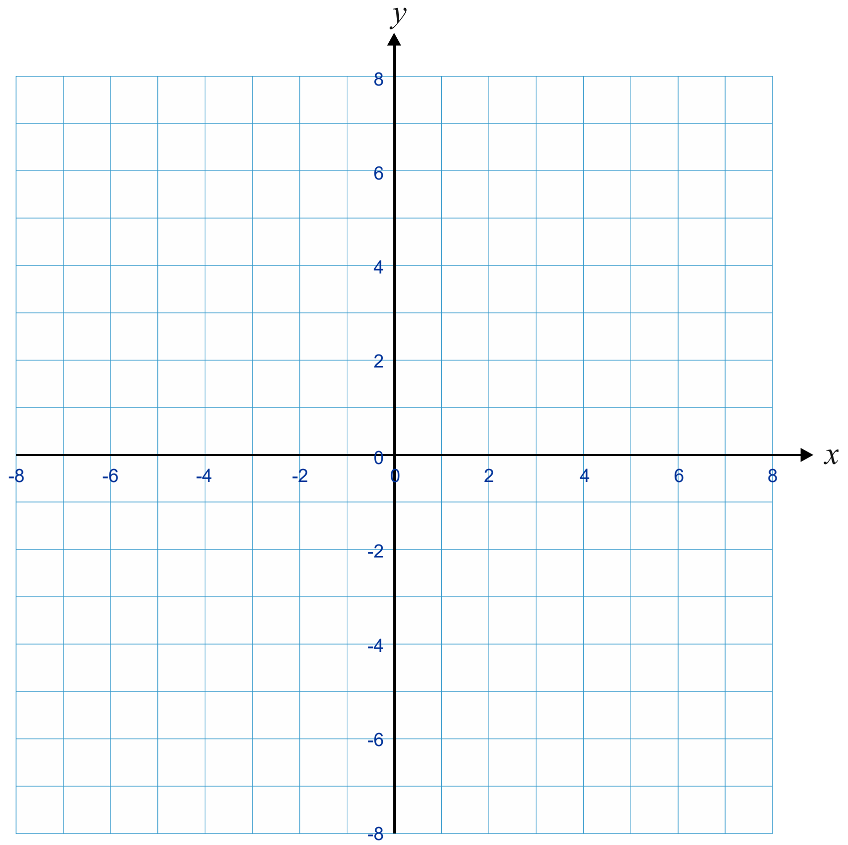


(1)	
(2)	
(3)	
(4)	
(5)	

Opgave 3 (Tegn graf ud fra forskrift)

Tegn i nedenstående koordinatsystem graferne for følgende lineære funktioner:

(1) $f(x)=x-3$ (2) $f(x)=-2x+5$ (3) $f(x)=\frac{1}{2}x+1$ (4) $f(x)=-7$



Eksempel 4 (Aflæse funktionsværdier grafisk: Kender *x*, skal finde *y*)

Til højre er tegnet graferne for to lineære funktioner.

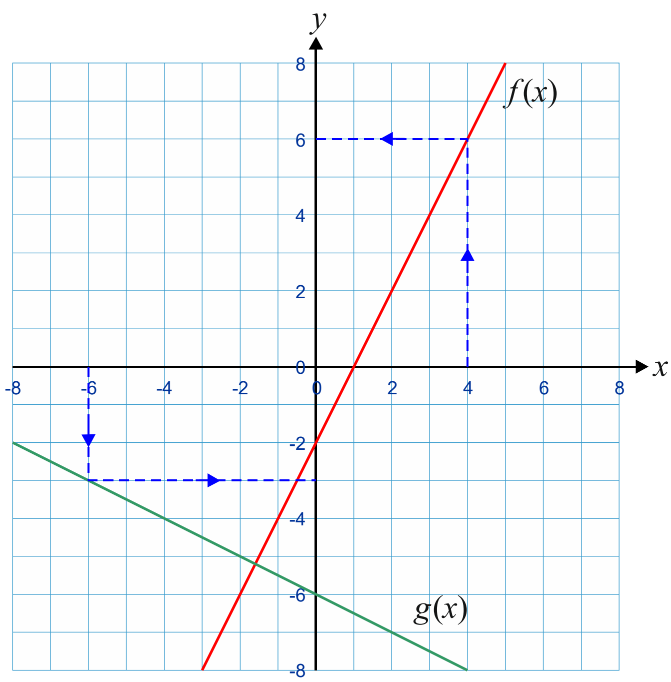
Funktionsværdier for *f* i $x=4$ fås ved at "gå" hen til 4 på *x*-aksen, op til grafen og hen til *y*-aksen. Her aflæses tallet 6. Da skrives:

$$f(4)=6$$

Tilsvarende, fås funktionsværdien for *g* i $x=-6$ til at være:

$$g(-6)=-3$$

En funktionsværdi er et *tal*, nemlig *y*-værdien, der hører til den aktuelle *x*-værdi!



Eksempel 5 (Beregning af funktionsværdier: Kender x, skal finde y)

Vi kigger på de to funktioner: $f(x)=2x-2$ og $g(x)=-\frac{1}{2}x-6$. Funktionsværdien for f i $x=4$ udregnes ved at udskifte alle forekomster af x i forskriften med 4 og regne:

$$f(4) \;=\; 2\cdot 4-2 \;=\; 8-2 \;=\; 6$$

Funktionsværdien for funktionen g i $x=-6$:

$$g(-6) \;=\; -\tfrac{1}{2}\cdot(-6)-6 \;=\; 3-6 \;=\; -3$$

NB! Da funktionerne i dette eksempel netop har graferne i eksempel 4, får vi samme resultater som i eksempel 4.

□

Opgave 6 (Aflæse funktionsværdier grafisk: Kender x, skal finde y)

På figuren nedenfor er afbildet graferne for to lineære funktioner f og g. Du skal ved aflæsning angive følgende funktionsværdier i de tomme felter:

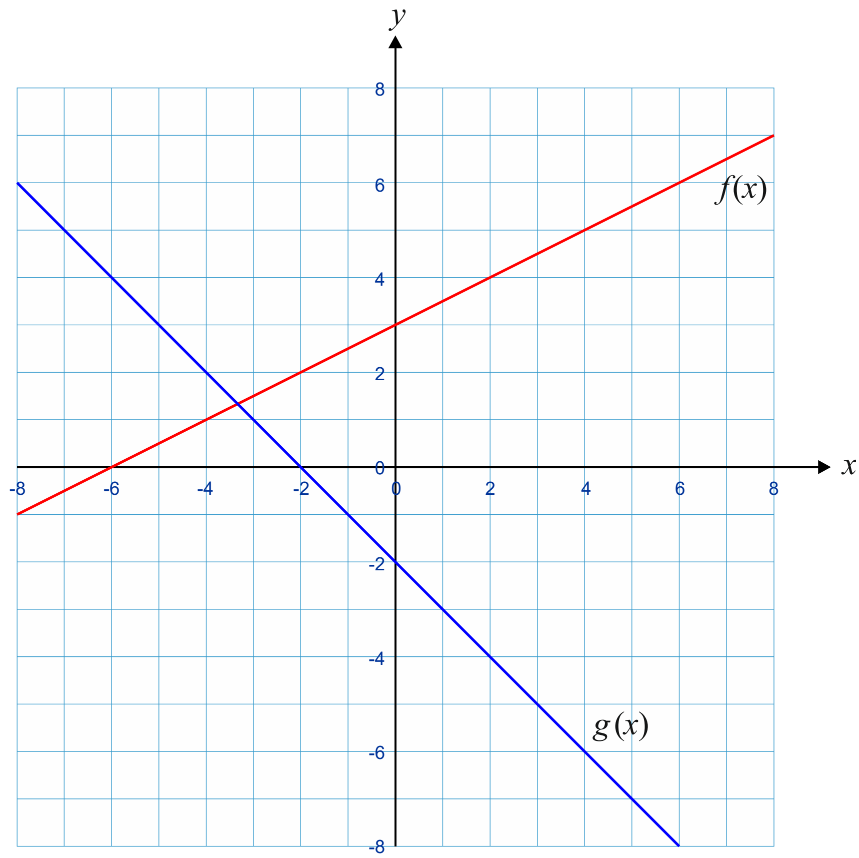
$$f(2) \;=\; \boxed{}$$

$$f(5) \;=\; \boxed{}$$

$$g(-4) \;=\; \boxed{}$$

$$g(0) \;=\; \boxed{}$$

Husk at markere aflæsningerne på graferne, ligesom i eksempel 4!



Opgave 7 (Udregn funktionsværdier)

Lad $f(x)=\frac{1}{2}x+3$ og $g(x)=-x-2$.

Bestem funktionsværdierne nedenfor (husk mellemregninger som i eksempel 5):

$f(2)\ =$

$f(5)\ =$

$g(-4)\ =$

$g(0)\ =$

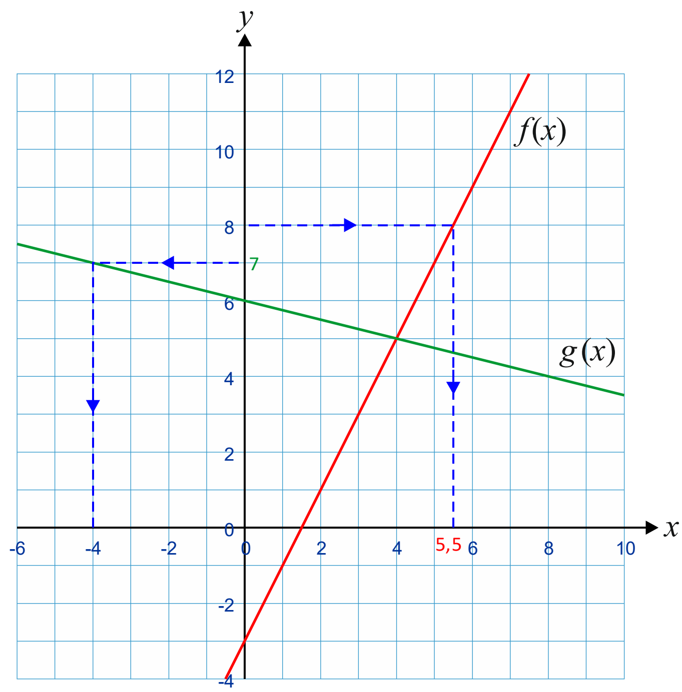
NB! Fik du samme resultater som ved aflæsning i opgave 6?

Eksempel 8 (Løs simpel ligning grafisk: Kender *y*, skal finde *x*)

Til højre er tegnet graferne for to lineære funktioner *f* og *g*. Løs følgende to ligninger *grafisk*:

$$f(x)=8$$
$$g(x)=7$$

I begge tilfælde kender vi altså *y*-værdien og skal finde *x*, sagt lidt løst. Derfor "går" vi fra den pågældende *y*-værdi vandret hen til grafen og ned/op til *x*-aksen og aflæser løsninger.



Vi kan skrive:

$$f(x)=8 \quad \Leftrightarrow \quad x=5{,}5$$
$$g(x)=7 \quad \Leftrightarrow \quad x=-4$$

Bemærkning 9

Der er altså tale om løsninger af *ligninger* i eksempel 8. Ligninger kan generelt set have ingen løsninger, én løsning, flere løsninger eller uendeligt mange løsninger!

Eksempel 10 (Løs simpel ligning ved beregning: Kender *y*, skal finde *x*)

Lad $f(x) = 2x - 2$ og $g(x) = -\frac{1}{4}x + 6$.

a) Løs ligningen $f(x) = 9$.
b) Løs ligningen $g(x) = 7$.

Løsninger:

a) $f(x) = 9 \quad \Leftrightarrow \quad 2x - 2 = 9 \quad \Leftrightarrow \quad 2x = 11 \quad \Leftrightarrow \quad x = 5{,}5$

Først lægges 2 til på begge sider af lighedstegnet, derefter divideres med 2 på begge sider.

b) $g(x) = 7 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{4}x + 6 = 7 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{4}x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = -4$

Først trækkes 6 fra på begge sider af lighedstegnet, derefter ganges med –4 på begge sider af lighedstegnet.

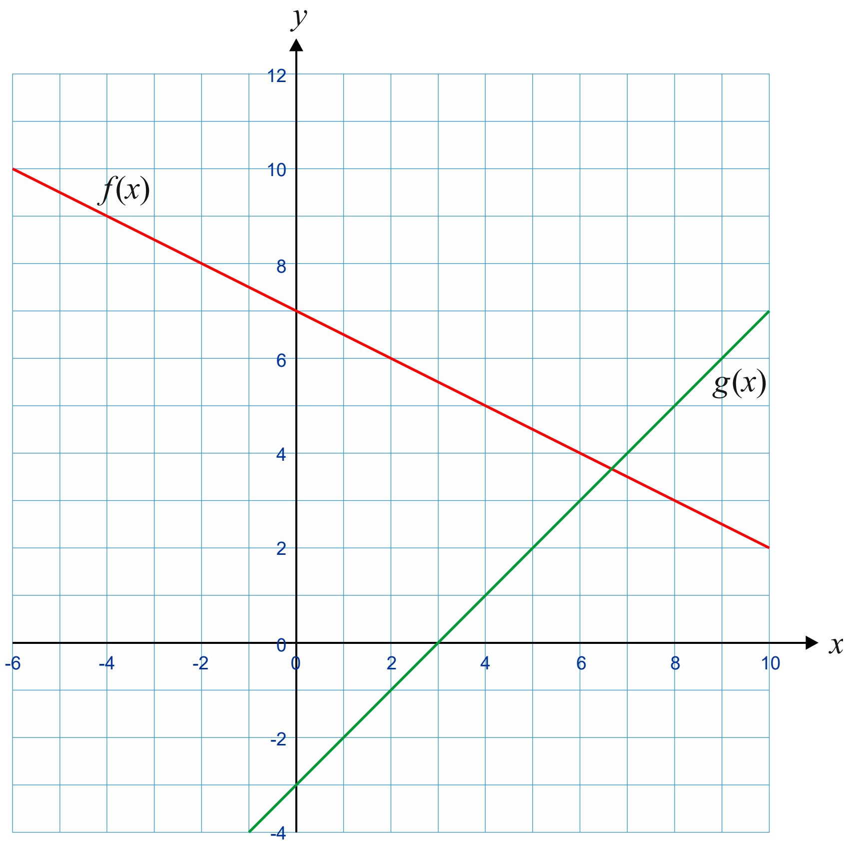
NB! Funktionerne i denne opgave har netop de grafer, som er vist i eksempel 8. Vi ser, at vi får samme resultater som i eksempel 8.

Opgave 11 (Løs simpel ligning grafisk: Kender *y*, skal finde *x*)

Nedenfor er afbildet graferne for to funktioner.

a) Løs ligningen $f(x) = 4$ grafisk.
b) Løs ligningen $g(x) = 1$ grafisk.

NB! Husk at markere løsningerne!



Opgave 12 (Løs simpel ligning ved beregning: Kender y, skal finde x)

Giver funktionerne $f(x) = -\frac{1}{2}x + 7$ og $g(x) = x - 3$.

a) Løs ligningen $f(x) = 4$ ved beregning.
b) Løs ligningen $g(x) = 1$ ved beregning.

NB! Funktionerne har netop de grafer, som blev vist i opgave 11. Får du de samme løsninger som i opgave 11?

Eksempel 13 (Beregne forskrift ud fra to punkter på grafen)

a) Grafen for en lineær funktion f går igennem punkterne $(2,3)$ og $(4,7)$. Beregn forskriften for f.
b) Grafen for en lineær funktion g går igennem punkterne $(-2,4)$ og $(3,-1)$. Beregn forskriften for g.

Løsninger:

a)

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{7-3}{4-2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$b = y_1 - a \cdot x_1 = 3 - 2 \cdot 2 = 3 - 4 = -1$$

Heraf fås $f(x) = 2x - 1$.

b)

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-1-4}{3-(-2)} = \frac{-5}{5} = -1$$

$$b = y_1 - a \cdot x_1 = 4 - (-1) \cdot (-2) = 4 - 2 = 2$$

Heraf fås $g(x) = -x + 2$.

Opgave 14 (Beregne forskrift ud fra to punkter på grafen)

I hver af nedenstående delspørgsmål skal du beregne forskriften for den lineære funktion, hvis graf passerer igennem de to angivne punkter.

a) $(2,1)$ og $(4,5)$

b) $(-2,1)$ og $(1,4)$

c) $(-2,6)$ og $(2,0)$

d) $(1{,}7\,;-1{,}2)$ og $(5{,}2\,;0{,}9)$

Opgave 15 (Beregne forskrift ud fra to punkter på grafen)

Bestem forskriften for den lineære funktion *f*, som opfylder $f(-1)=4$ og $f(3)=2$.

Eksempel 16 (Beregn grafens skæring med *x*-aksen)

Lad $f(x)=2x-4$. Beregn det punkt, hvor grafen skærer *x*-aksen.

Løsning: Da punkter på *x*-aksen har *y*-koordinat 0, skal vi altså løse ligningen $f(x)=0$. Vi er dermed i et specialtilfælde af opgavetypen fra eksempel 10.

$$f(x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x-4=0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x=4 \quad \Leftrightarrow \quad x=2$$

Grafens skæringspunkt med *x*-aksen har altså koordinaterne $(2,0)$.

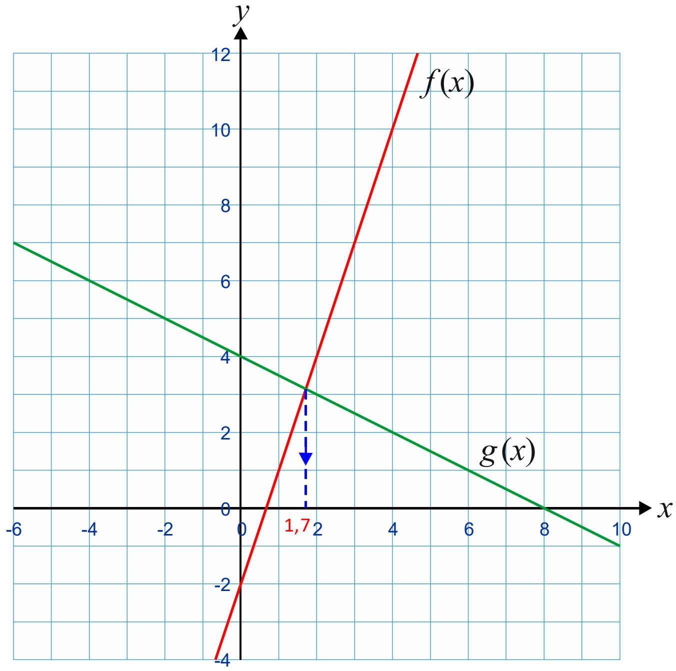
Opgave 17 (Beregn grafens skæring med *x*-aksen)

a) Lad $f(x)=3x+3$. Beregn det punkt, hvor grafen skærer *x*-aksen.

b) Lad $f(x)=-\frac{1}{2}x+6$. Beregn det punkt, hvor grafen skærer *x*-aksen.

Eksempel 18 (Løse ligning af typen $f(x) = g(x)$ grafisk)

Graferne for de lineære funktioner f og g er afbildet i koordinatsystemet til højre. Løs ligningen $f(x) = g(x)$ grafisk.



Løsning:
$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x = 1{,}7$
jf. markeringen på grafen.

NB! Vi søger altså de værdier af x, for hvilket f og g giver samme y-værdi. Det svarer til at bestemme skæringspunktet mellem de to grafer og vælge x-koordinaten (*ikke* begge koordinater!).

Eksempel 19 (Løse ligning af typen $f(x) = g(x)$ ved beregning)

Givet de to lineære funktioner: $f(x) = 3x - 2$ og $g(x) = -\frac{1}{2}x + 4$. Løs ved beregning ligningen $f(x) = g(x)$.

Løsning: Vi indsætter blot udtrykkene for $f(x)$ og $g(x)$ og løser ligningen:

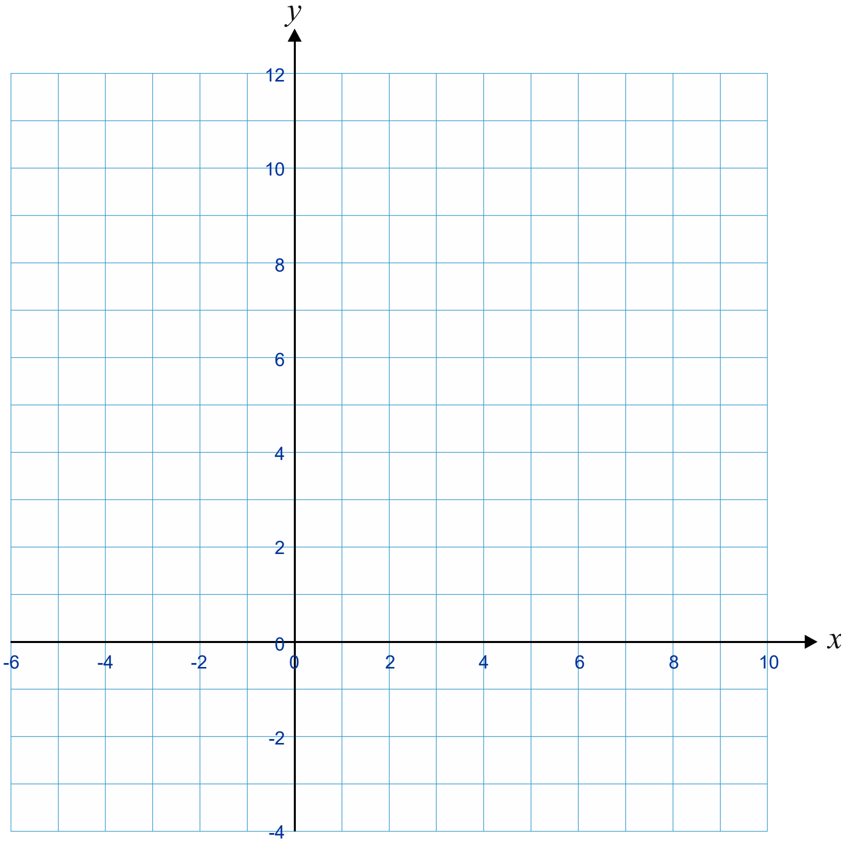
$$f(x) = g(x) \quad \Leftrightarrow \quad 3x - 2 = -\tfrac{1}{2}x + 4 \quad \Leftrightarrow \quad 3x = -\tfrac{1}{2}x + 6 \quad \Leftrightarrow \quad 3{,}5x = 6 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{6}{3{,}5} = \frac{12}{7}$$

I sidste skridt forlænger vi lige med 2 i tæller og nævner for at få en brøk mellem hele tal. Tallet 12/7 er den *eksakte* løsning. I kommatal er det 1,7143857… Bemærk, at da graferne fra eksempel 18 netop er graferne for f og g i denne opgave, så skulle vi gerne få samme løsning. Det gør vi også op til den nøjagtighed, der med rimelighed kan aflæses med. Ved grafisk løsning tillades en lille afvigelse, da man ikke kan aflæse nøjagtigt!

Opgave 20 (Tegne graf, aflæse og beregne løsning til ligning af typen $f(x) = g(x)$)

Givet de to lineære funktioner: $f(x) = 2x - 3$ og $g(x) = \frac{1}{2}x + 5$.

a) Tegn graferne for de to funktioner i koordinatsystemet på næste side.
b) Løs ligningen $f(x) = g(x)$ grafisk.
c) Løs ligningen $f(x) = g(x)$ ved beregning. Får du det samme som i b) eller tæt på?



Eksempel 21 (Bestemme y-tilvæksten for en given x-tilvækst)

Lad $f(x)=2{,}7x+6{,}9$.

a) Hvor meget vokser funktionsværdien med, når x gives en positiv tilvækst på 5?
b) Samme spørgsmål, hvis x gives en tilvækst på -10.

Løsninger: En omskrivning af formlen for a giver: $a=\dfrac{\Delta y}{\Delta x} \Leftrightarrow \Delta y = a\cdot\Delta x$.

a) $$\Delta y \;=\; a\cdot\Delta x \;=\; 2{,}7\cdot 5 \;=\; 13{,}5$$

Når x vokser med 2,7, vil funktionsværdien eller y altså vokse med 13,5.

b) $$\Delta y \;=\; a\cdot\Delta x \;=\; 2{,}7\cdot(-10) \;=\; -27$$

Når x aftager med 10, vil funktionsværdien eller y altså aftage med 27.

Opgave 22 (Bestemme y-tilvæksten for en given x-tilvækst)

Lad $f(x)=8x-10$. Hvad sker der med funktionsværdien (y-værdien), hvis x vokser med 5? Samme spørgsmål, hvis x aftager med 3.

Eksempel 23 (Opstille simpel lineær model)

En kunde hos et elselskab skal betale et fast månedligt abonnement på 600 kr. Derudover skal kunden betale 1,35 kr. pr. kWh energi, denne forbruger. Opstil en simpel lineær model, som angiver kundens månedlige udgifter til el som funktion af den forbrugte mængde energi i perioden.

Løsning: Det er altid godt at gøre sig klart, hvad x og y skal betyde (med enheder):

x : Antal brugte kWh.
y : Den samlede månedlige pris i kr.

Det er ret indlysende, at man får den variable del af prisen ved at gange antal kWh med prisen pr. kWh, altså $1{,}35 \cdot x$ (hvis vi undertrykket enheden på de 1,35). Derefter lægges den faste pris til. Altså alt i alt:

$$y = 1{,}35 \cdot x + 600$$

Forskriften kan bruges til at udregne ting, men det vil vi overlade til en senere opgave.

Opgave 24 (Opstille simpel lineær model m. m.)

Der er 50 liter vand i en beholder. Der tappes vand fra beholderen med en konstant hastighed på 2,5 liter i timen.

a) Opstil en simpel lineær model, som beskriver indholdet af vand i beholderen som funktion af tiden efter start. Beskriv først med ord hvad x og y skal stå for, inklusiv enheder.
b) Hvornår er der 20 liter vand tilbage i beholderen? Løs som ligning.
c) Hvor længe går der, før beholderen er tom? Løs igen som ligning.

Opgave 25 (Opstille simpel lineær model)

Et taxa-firma tager et startgebyr på 30 kr. og derudover 16 kr. pr. kørt km.

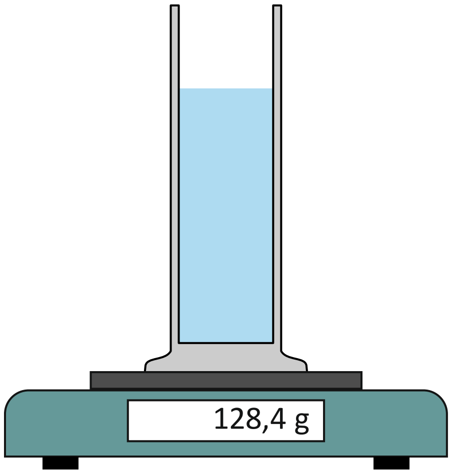
a) Opstil en simpel lineær model, som beskriver prisen for at køre i taxaen som funktion af antal kørte km. Beskriv først med ord hvad x og y skal stå for, inklusiv enheder.
b) Hvor meget koster det at køre 3 km? *Hjælp*: Udregn resultatet som en funktionsværdi.
c) Hvor langt kan man køre for 120 kr.? *Hjælp*: Optil ligning.
d) Den lineære model er ikke helt realistisk. Der er et forhold ved taxa-kørsel, som den ikke tager højde for. Hvilken?

Opgave 26 (Regne videre med simpel lineær model)

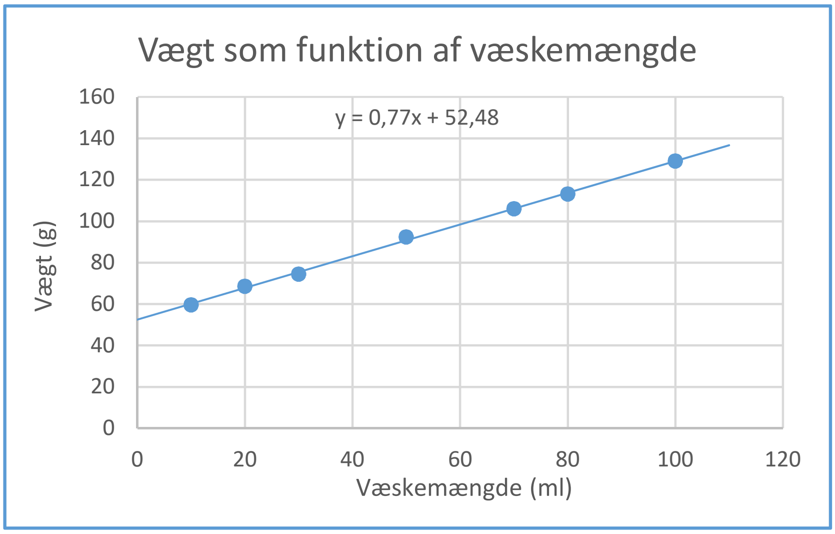
I denne opgave skal du arbejde videre med den lineære model fra eksempel 23. En måned får kunden en regning på 1150 kr. Hvor mange kWh havde kunden brugt den måned? *Hjælp*: Opstil ligning ud fra den lineære model og løs ligningen.

Eksempel 27 (Lineær regression med fortolkninger af *a* og *b*)

I et forsøg med en væske i et måleglas anbragt på en vægt har man foretaget sammenhørende målinger af vægtens visning og væskemængden. Det har givet anledning til måleresultaterne i tabellen herunder til venstre. Ved at plotte punkterne ind i et koordinatsystem har man registeret, at der op til usikkerheder er tale om en *lineær sammenhæng*. Derfor er det relevant at udføre *lineær regression* på data. I dette tilfælde er Microsoft Excel blevet benyttet, men det kan i princippet være et vilkårligt program, som kan gøre det.



x (ml)	y (g)
10	59,6
20	68,5
30	74,4
50	92,3
70	106,0
80	113,1
100	129,0



Resultatet er, at den lineære sammenhæng er $y = 0{,}77x + 52{,}48$, hvor x er antal ml væske i måleglasset og y er vægtens visning i gram. Vi skal give en fortolkning af a og b i den lineære sammenhæng: Vi ved, at b er grafens skæring med x-aksen. Men det svarer til at $x = 0$, hvilket vil sige, at der er 0 ml væske i måleglasset. Det betyder, at vi kan fortolke b som massen af det tomme måleglas. Måleglasset vejer altså ca. 52,48 g. Hvad angår $a = 0{,}77$, så ved vi, at den angiver y-tilvæksten ved en x-tilvækst på 1. Det betyder her, at hvis vi kommer en ekstra ml væske i måleglasset, så øges vægtens visning med 0,77 g. Den ekstra ml væske vejer altså 0,77 g. Den opmærksomme læser vil måske opdage, at det betyder, at *massefylden* (eller *densiteten*) af væsken er 0,77 g/ml.

NB! Egentlig har a og b også enheder på her, det er bare de færreste programmer, som kan håndtere det. Men man kan tænke sig til det: Hældningskoeficienten a har altid den enhed, som fremkommer ved at dividere enheden på y-aksen med enheden på x-aksen. Konstantleddet b har altid samme enhed som den på y-aksen. Det kan hjælpe én med at komme til fortolkningerne, hvis man indser dette!

Opgave 28 (Lineær regression med fortolkninger af a og b m. m.)

I et forsøg hælder man en mængde vand i en elkedel og tænder for elkedlen. I tabellen til højre er angivet vandets temperatur som funktion af tiden. Enhederne står i parentes.

x	y
(s)	(°C)
12	24,7
20	30,3
37	39,4
50	48,3
68	57,8
81	64,9
105	80,4

a) Foretag lineær regression på data med et eller andet redskab, som kan angive forskriften for den bedste lineære sammenhæng og tegne punkter og grafen for den lineære sammenhæng. Hvor godt passer linjen til data?

b) Opskriv tydeligt med ord og enheder, hvad x og y betyder i modellen.

c) Giv en fortolkning af a og b i den konkrete model. Du skal inddrage de konkrete tal og bruge enheder. Hvad fortæller a og b?

d) Benyt modellen til at give et bud på, hvad vandets temperatur var efter 90 sekunder.

e) Benyt modellen til at give et bud på, hvor lang tid der går, før temperaturen når 95°C.

Opgave 29 (Fortolkning af *a* og *b* i en lineær model)

Indenfor naturgeografi arbejder man med en såkaldt *standardatmosfære*. Den indeholder en model over trykkets og luftens temperaturs afhængighed af højden over jordoverfladen. Hvad angår temperaturens afhængighed, har man følgende model i Troposfæren:

$$y = -6{,}5 \cdot x + 15$$

hvor x er højden over jordoverfladen regnet i km og y er temperaturen i °C.
Giv en fortolkning af a g b i den lineære sammenhæng. Prøv også at sætte enheder på.