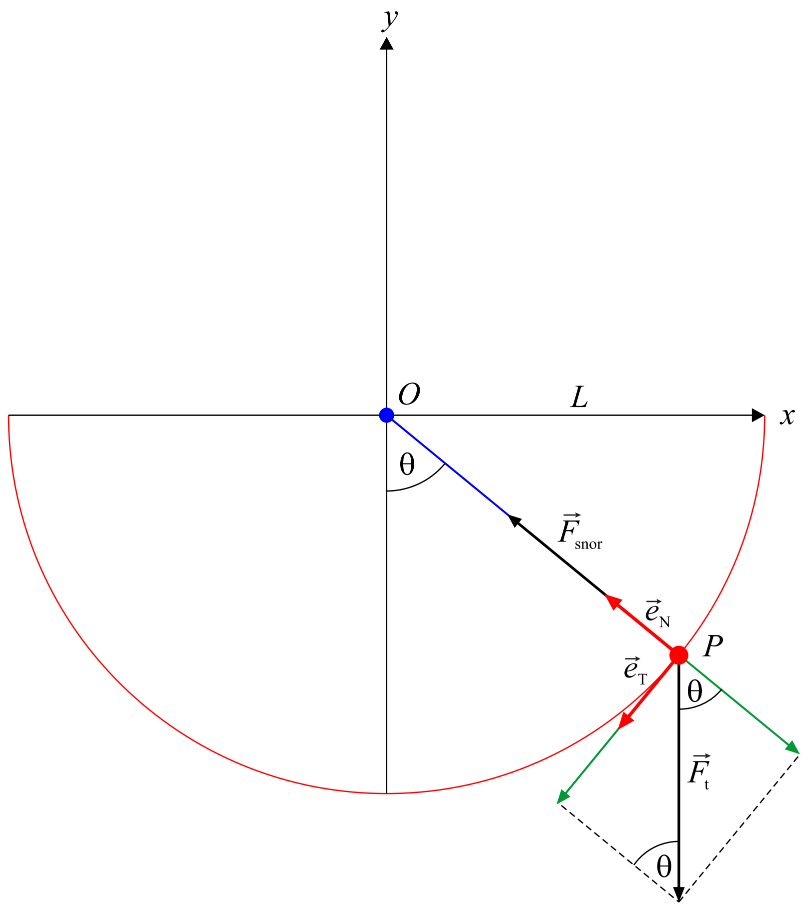
# Det matematiske pendul – en guide

I dette tillæg guides læseren til en udledning af en differentialligning for bevægelsen af et *matematisk pendul*. Udgangspunktet er et objekt, fx en bold, med masse $m$, der kan svinge frit i en snor $OP$ omkring det faste punkt $O$. Der ses bort fra snorens masse, luftmodstand, etc. Det er klart, at bolden vil foretage en cirkelbevægelse, altså gennemføre en del af en cirkelbane. Det er oplagt, at der *ikke* kan være tale om en jævn cirkelbevægelse (Overvej hvorfor – tænk på mekanisk energi!). Værktøjerne til en udledning af en bevægelsesligning er *Newtons 2. lov*. Den gælder naturligvis også på vektorform:

(1) $$\vec{F}_{res} = m \cdot \vec{a}$$

*Stedfunktionen* for bolden benævner vi $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$. Der er tale om en vektorfunktion med de to koordinatfunktioner $x(t)$ og $y(t)$, hvor tiden $t$ er den uafhængige variable. Vi vil udnytte, at man får *hastighedsfunktionen* ved at differentiere stedfunktionen. Det gøres koordinatvist: $\vec{v}(t) = \vec{r}\,'(t) = (x'(t), y'(t))$. Endvidere fås *accelerationsfunktionen* ved at differentiere hastighedsfunktionen $\vec{a}(t) = \vec{v}\,'(t) = \vec{r}\,''(t) = (x''(t), y''(t))$. I det følgende lader vi snorens vinkel i forhold til lodret til tidspunktet $t$ være betegnet $\theta(t)$. Undertiden vil vi blot benævne vinklen med θ, og lade det være underforstået, at der er tale om en vinkel, som er en funktion af tiden. Snorens længde betegner vi med $L$.



a) Argumenter for, hvorfor stedfunktionen må være på følgende form:

(2) $$\vec{r}(t) \;=\; \overrightarrow{OP} \;=\; \begin{pmatrix} L\cdot\sin\big(\theta(t)\big) \\ -L\cdot\cos\big(\theta(t)\big) \end{pmatrix}$$

c) Benyt reglen for differentiation af sammensat funktion til at påvise, at hastigheds-funktionen kan udtrykkes således:

(3) $$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} L\cdot\theta'(t)\cdot\cos\big(\theta(t)\big) \\ L\cdot\theta'(t)\cdot\sin\big(\theta(t)\big) \end{pmatrix}$$

d) Vis ved brug af reglen for differentiation af sammensat funktion samt produktreglen, at accelerationsfunktionen kan udtrykkes således:

(4) $$\vec{a}(t) = \vec{v}'(t) = \begin{pmatrix} L\cdot\theta''(t)\cdot\cos\big(\theta(t)\big) - L\cdot\big(\theta'(t)\big)^2\cdot\sin\big(\theta(t)\big) \\ L\cdot\theta''(t)\cdot\sin\big(\theta(t)\big) + L\cdot\big(\theta'(t)\big)^2\cdot\cos\big(\theta(t)\big) \end{pmatrix}$$

e) Vi indfører to nye vektorer $\vec{e}_N$ og $\vec{e}_T$, som afhænger af tiden *t*:

(5) $$\vec{e}_N = \begin{pmatrix} -\sin\big(\theta(t)\big) \\ \cos\big(\theta(t)\big) \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_T = \hat{\vec{e}}_N = \begin{pmatrix} -\cos\big(\theta(t)\big) \\ -\sin\big(\theta(t)\big) \end{pmatrix}$$

Påvis, at der er tale om enhedsvektorer, og at $\vec{e}_N$ er modsat rettet stedvektoren $\vec{r}(t)$, og at $\vec{e}_T$ er en tangentvektor til banekurven, som vist på figuren på forrige side.

f) Benyt d) og e) til at vise, at accelerationsvektoren kan skrives således:

(6) $$\vec{a}(t) \;=\; -L\cdot\theta''(t)\cdot\vec{e}_T + L\cdot\big(\theta'(t)\big)^2\cdot\vec{e}_N$$

Newtons 2. lov giver os herefter, at

(7) $$\vec{F}_{res} \;=\; m\cdot\vec{a} \;=\; -m\cdot L\cdot\theta''(t)\cdot\vec{e}_T + m\cdot L\cdot\big(\theta'(t)\big)^2\cdot\vec{e}_N$$

g) De eneste kræfter, som virker på bolden, er tyngdekraften $\vec{F}_t$ og snorkraften $\vec{F}_{snor}$. Snorkraften er ensrettet med normalvektoren $\vec{e}_N$. Derfor er den eneste tangentielle komposant af den resulterende kraft den, som fås ved at projicere tyngdekraften ind på tangentvektoren $\vec{e}_T$. Vis, at det giver:

(8) $$-m\cdot L\cdot\theta''(t) = m\cdot g\cdot\sin\big(\theta(t)\big)$$

h) Vis, at ligningen (8) giver anledning til følgende differentialligning:

(9) $$\theta''(t) = -\frac{g}{L}\cdot\sin\big(\theta(t)\big)$$

i) Benyt dit CAS-værktøj til at vise, at

(10) $$\frac{\sin(\theta)}{\theta} \;\to\; 1 \text{ for } \theta\to 0$$

Dermed er $\sin(\theta)\approx\theta$ for $\theta$ lille. Vi kan bruge dette faktum til at omskrive den svære differentialligning (9) til én som er simplere, nemlig:

(11) $$\theta''(t) = -\frac{g}{L}\cdot\theta(t)$$

Omkostningen er, at den kun er (omtrent) rigtig, og endda kun når udsvinget $\theta$ er lille. Vi vil nu regne videre på (11). Vi søger altså en funktion $\theta(t)$, som når den differentieres to gange er lig mig den selv ganget med den negative konstant $-g/L$.

k) Vis ved indsættelse, at en funktion på formen:

(12) $$\theta(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$$

hvor $\omega = \sqrt{g/L}$, er en løsning til (11). Giv en fortolkning af konstanterne $A$, $\omega$ og $\varphi$. Hvor kommer startbetingelserne ind i billedet?

l) Vis at svingningstiden for pendulet teoretisk er givet ved:

(13) $$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{L}{g}}$$

m) Gennemfør forsøg til verifikation af, om den svingningstid holder i praksis. Husk små udsving!

## Bemærkning 1 (Avanceret)

Fra punkt g) og frem beskæftigede vi os udelukkende med den tangentielle komposant af den resulterende kraft på bolden. Hvis man ønsker at bestemme et udtryk for snorkraften i det generelle tilfælde med et *ikke* nødvendigvis lille vinkeludsving, kan det gøres ved at betragte normal-komposanten af den resulterende kraft. Den ses ret nemt – ved hjælp af (7) og en inspektion af figuren – at give anledning til følgende ligning:

(14) $$\begin{gathered} m \cdot L \cdot \left(\theta'(t)\right)^2 = F_{snor} - m \cdot g \cdot \cos\left(\theta(t)\right) \\ \Updownarrow \\ F_{snor} = m \cdot L \cdot \left(\theta'(t)\right)^2 + m \cdot g \cdot \cos\left(\theta(t)\right) \end{gathered}$$

Bemærk i øvrigt, at hvis man kalder længden af hastighedsvektoren for $v(t)$, så giver (3) os, at $v(t) = L \cdot \theta'(t)$. Det gør, at snorkraften alternativt kan skrives således:

(15) $$F_{snor} = m \cdot \frac{\left(v(t)\right)^2}{L} + m \cdot g \cdot \cos\left(\theta(t)\right)$$

Det første led får en til at tænke på udtrykket for centripetalkraften i en jævn cirkelbevægelse, hvor radius er $L$. Her er snorkraften imidlertid varierende, dels som følge af at farten i cirkelbevægelsen varierer og fordi vinklen varierer. Snorkraften er klart størst i bunden!

## Bemærkning 2

Lad $\theta_0$ betegne det maksimale udsving. Man kan da vise, at der gælder følgende generelle og i princippet eksakte formel for svingningstiden for et matematisk pendul:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{L}{g}} \cdot \left( 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right) + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 \cdot \sin^4\left(\frac{\theta_0}{2}\right) + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 \cdot \sin^6\left(\frac{\theta_0}{2}\right) + \ldots \right)$$

Når $\theta_0$ er lille, er parentesen stort set lig med 1, hvorved vi får formlen (13) for svingningstiden ovenfor. Jo større $\theta_0$ er, jo vigtigere er det at medtage justeringsleddene …