Projekt med det skrå kast

- og Projectile Launcher

I dette projekt betragtes det skrå kast uden luftmodstand og der udføres et forsøg med det meget præcise fysikudstyr *Projectile Launcher* fra firmaet *Vernier*. Den findes i en almindelig version med kabel og i en *Go Direct* version, som kan bruges trådløst. Hvilken en, man bruger her, er ikke afgørende. Der skydes med en lille metalkugle, så man i praksis kan se bort fra luftmodstand.

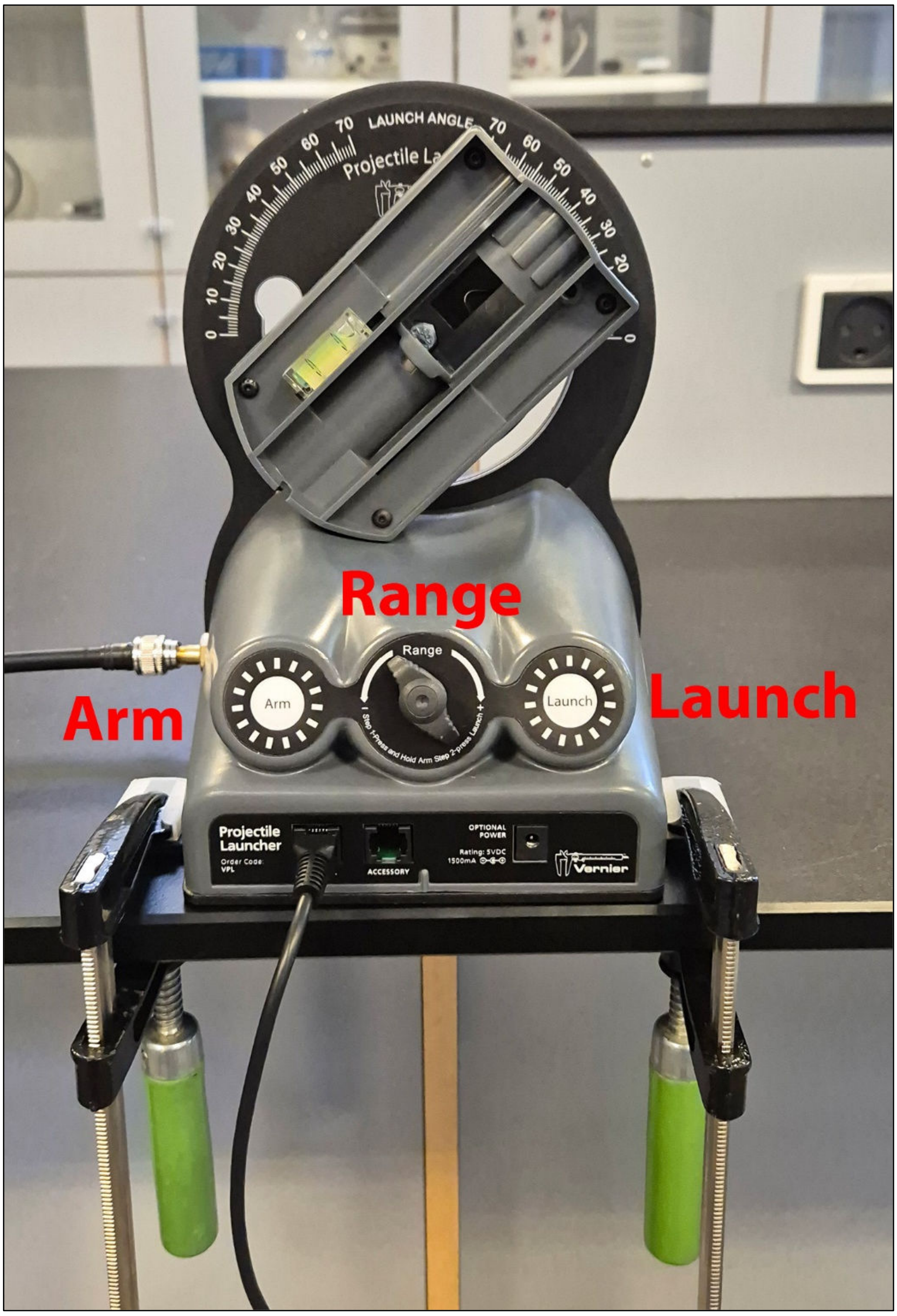
Instruktion i brug af kanonen

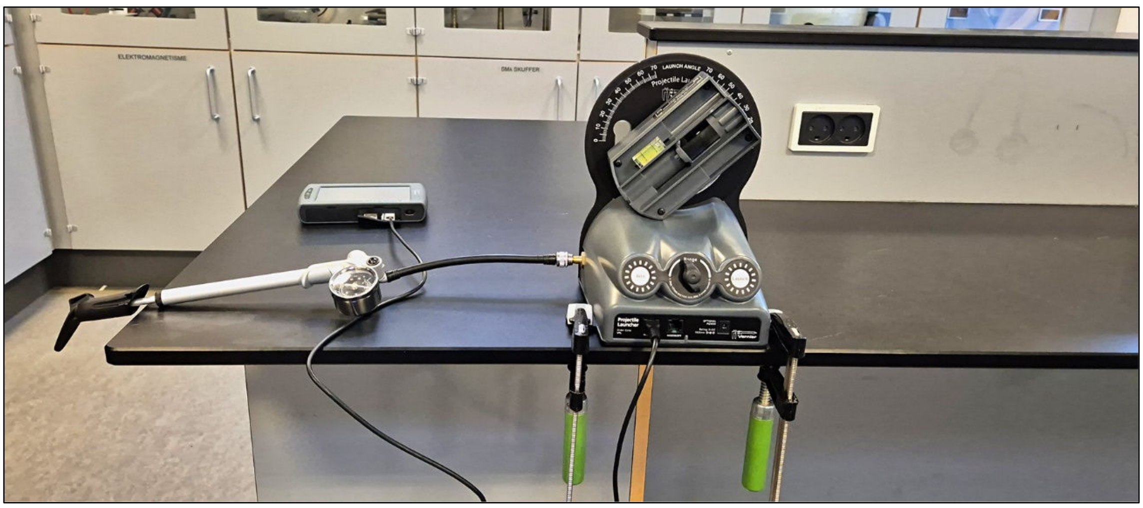
- Forbind Interface porten på Projective Launcher (kanonen) til en LabQuest eller en LabQuest Mini via det medfølgende Photogate-kabel. Kanonen får derved strøm fra LabQuesten.
- Forbind LabQuesten til computeren.
- Åbn softwaren Vernier Graphical Analysis Pro.
- Fastgør kanonen på et vandret bord ved hjælp af to skruetvinger, som vist på billedet på næste side.
- Forbind håndpumpen til kanonen. Sørg for, at den ligger udstrukket.
- Løsn den nederste skrueknap på bagsiden af kanonen og drej kanonrøret ned, så det bliver vandret. Stram derefter skrueknappen.
- Løsn den øverste skrueknap på bagsiden af kanonen og drej vinkelskiven, så 0 grader er ud for markeringen på kanonrøret. Stram derefter skrueknappen.

Klar til forsøg

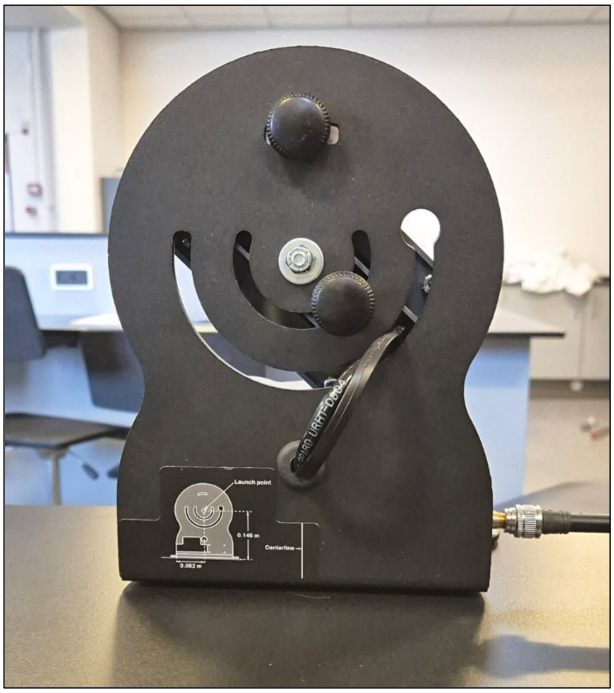
1. Løsn den nederste skrueknap på bagsiden af kanonen og drej kanonrøret til det har den ønskede *elevation*, dvs. vinkel i forhold til vandret.
2. Indstil udløsningstrykket via drejeknappen *Range* foran på kanonen (drej med uret). Denne drejeknap styrer indirekte mundingshastigheden på kuglen.
3. Drop metalkuglen ned i kanonløbet. Den skal helt ned i bunden af løbet!
4. Pump med håndpumpen indtil trykket stabiliserer sig. Når noget luft hørbart "løber over", har man nået det rette tryk. Det anbefales, at man lytter efter tre af disse luftlyde og bagefter venter 5 sekunder for at sikre sig, at trykket har stabiliseret sig helt.
5. Start dataopsamling i Graphical Analysis Pro på computeren.
6. Nu er du klar til at udløse kuglen. Sørg for at alle i nærheden har sikkerhedsbriller på! Hold knappen *Arm* nede. Derefter vil et tryk på knappen *Launch* udløse kuglen.

Produktoplysning: Når kuglen befinder sig i bunden af kanonløbet, befinder dens centrum i højden 0,146 m over bunden af kanonen. Sørg for ikke at pumpe til et højere tryk end 150 psi. Når apparatet gemmes væk, så sørg for, at der ikke er overtryk i kammeret. Det kan gøres ved at affyre kuglen en eller flere gange.


LAUNCH ANGLE
Projectile Launcher
Range
Arm
Launch
Projectile Launcher
OPTIONAL POWER
ACCESSORY
Vernier

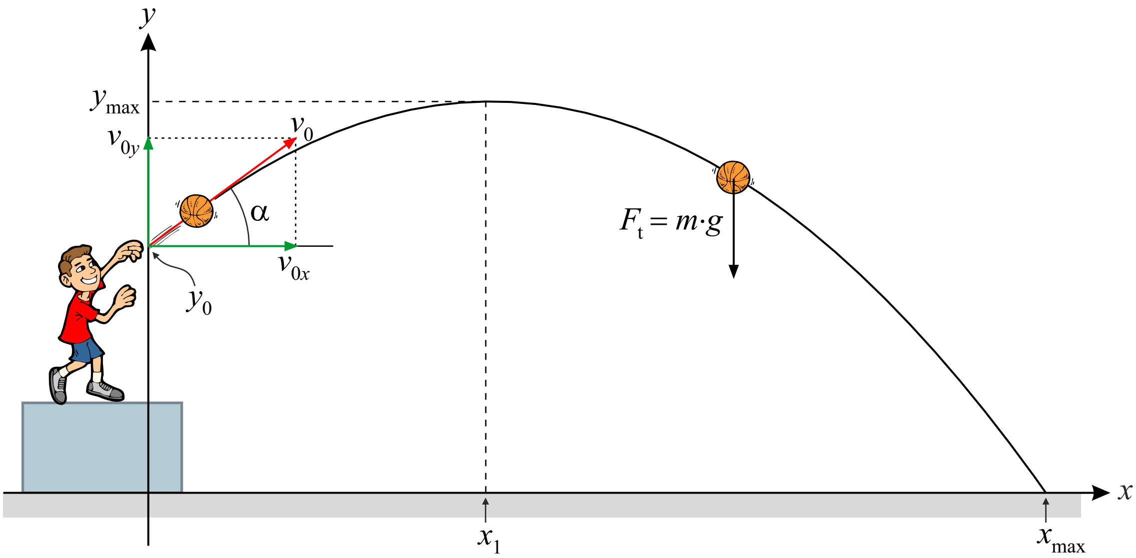


Den nederste drejeknap kan løsnes for at indstille elevationen, altså kanonrørets vinkel i forhold til vandret. Den øverste drejeknap bruges til at dreje vinkelinddelingen. Nederst findes en markering for kuglens vandrette position. Den lodrette afstand står også anført.



Matematisk model

Den matematiske model, der er relevant her, er den, der normalt går under navnet *det skrå kast uden luftmodstand*. At der er tale om et kast eller skud er ikke afgørende. Udgangspunktet er, at bolden/kuglen forlader hånden/kanonen i punktet $(0, y_0)$ med en begyndelsesfart på v_0, som danner en vinkel på α med vandret. Vi siger, at *elevationen* er α.



Den vektorfunktion, som beskriver bevægelsen som funktion af tiden *t*, er følgende:

$$(1) \qquad \vec{s}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 \cdot \cos(\alpha) \cdot t \\ -\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + v_0 \cdot \sin(\alpha) \cdot t + y_0 \end{pmatrix}$$

Forsøg

Delforsøg 1

Et langt bord er idéelt til forsøget. Læg et ark karton ud på det sted, hvor kuglen antages at ramme. Kuglen vil typisk lave et lille mærke på dette karton. Du bør sikre dig, at kuglen ikke laver mærker i selve bordet! Indstil nu kanonen til en eller anden vinkel mellem 30 og 40 grader. Pump kanonen op, så man har en mellemstor kraft på kuglen, når den udløses. Udløs kuglen og se, om den får en passende lang kastelængde. Noter både vinklen α, begyndelsesfarten v_0 og kastelængden $x_{\max}$ ned. Husk at $y_0 = 0{,}146\ \text{m}$, hvis nedslagsstedet er i niveau med bunden af kanonen. Gentag forsøget tre gange med samme indstilling. Hvor godt reproduceres resultaterne? Man kan passende nedskrive gennemsnittet af kastelængderne $x_{\max}$.

α	v_0	y_0	$x_{\max}$

Teori

Benyt værdierne for α, v_0 og y_0 ovenfor til at indsætte i stedfunktionen $\vec{s}(t)$ sammen med værdien 9,82 for tyngdeaccelerationen. Bestem først "kastetiden" ved at løse en ligning i Maple. Med "kastetiden", mener vi her den tid, der går, før kuglen rammer bordet. Indsæt denne tid i $x(t)$ for at bestemme kastelængden $x_{\max}$. Hvor godt stemmer denne teoretiske værdi med den eksperimentelle værdi fra forsøget?

Delforsøg 2

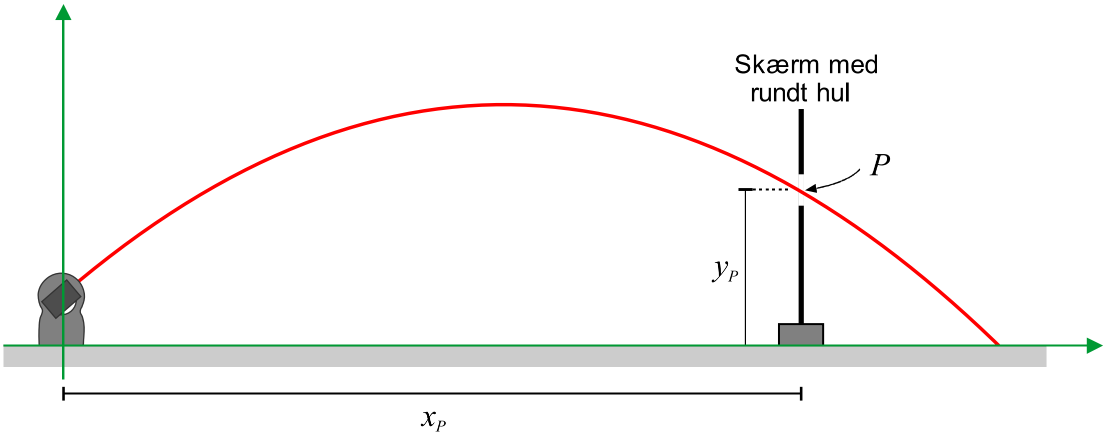
Du skal løse et *ballistisk* problem, som kræver, at du først foretager nogle beregninger, før det egentlige forsøg udføres. Kanonen skal for det første have en fast begyndelsesfart (mundingsfart), dernæst skal kuglen ramme et objekt eller et hul i et punkt $P(x_P, y_P)$, hvor koordinaterne er $x_P = 2{,}00\ \text{m}$ og $y_P = 0{,}50\ \text{m}$. Her regnes i et koordinatsystem, hvor x-aksen er vandret og origo er i det punkt, der befinder sig i bunden af kanonen, lige under kuglens startposition. y-aksen er lodret. Du er velkommen til at vælge andre værdier for x_P og y_P, hvis det passer bedre ind i dit aktuelle forsøgs-setup. Værdien for den faste mundingsfart v_0 vurderer du ved først at pumpe kanonen op, skyde kuglen afsted og gribe den i farten. Når du så skal udføre det egentlige forsøg, pumper du op til samme niveau. Den ubekendte er kanonens elevation α.

Teori

Benyt (1) til at opstille et ligningssystem ud fra de to oplysninger for x_P og y_P. Hvilken ubekendt er der udover elevationen α? Benyt Maple til at løse et ligningssystem med to ubekendte. Herefter vil du blandt andet have den ønskede elevation α. NB! Ofte vil der være to muligheder, men én er mere oplagt end den anden!

Forsøg

Kanonen indstilles med den elevation, som du har beregnet under teoridelen. Der er nu flere muligheder for at udføre forsøget: Enten kan du stille en genstand op i punktet P bestemt af værdierne af x_P og y_P, eller også kan du stille en skærm med et hul i op, så centrum af hullet er i omtalte punkt P.



Teoretiske opgaver

a) Bestem hastighedsvektorfunktionen $\vec{v}(t)$ ved at differentiere stedfunktionen $\vec{s}(t)$.

b) Bestem accelerationsvektorfunktionen $\vec{a}(t)$ ved at differentiere $\vec{v}(t)$.

c) Bestem begyndelseshastigheden $\vec{v}(0)$ og vis, at længden af vektoren er v_0.

d) Benyt accelerationen fra b) til at bestemme den resulterende kraft på bolden/kuglen. Stemmer den med det, vi ville forvente?

e) Undertiden kan banekurven for en vektorfunktion bestemmes som grafen for en funktion. Det er tilfældet her. Isolér t i udtrykket for $x(t)$ i (1) og indsæt dette udtryk på t's plads i $y(t)$. Reducér resultatet, så du har y som funktion af x. Det skal gerne være et andengradspolynomium? Dette fortæller os, at den teoretiske banekurve for det skrå kast uden luftmodstand er en *parabel*. Hvad er koefficienterne i andengradspolynomiet?

f) (*Ekstra*). I teoridelen til delforsøg 1 bestemte du den teoretiske kastelængde i et konkret taleksempel. Vis følgende generelle formel for kastelængden:

$$x_{\max} = \frac{v_0 \cdot \cos(\alpha) \cdot \left(v_0 \cdot \sin(\alpha) + \sqrt{(v_0 \cdot \sin(\alpha))^2 + 2 \cdot g \cdot y_0} \right)}{g}$$

Hvis du har styr på teknikken, kan du faktisk få Maple til at gøre dette for dig!

g) Hvornår opdagede man historisk set, at en sten bevæger sig i en parabelbane, når man kaster den? Hvem var den berømte fysiker, som gjorde sig gældende i den forbindelse? Benyt Internettet til at få idéer.