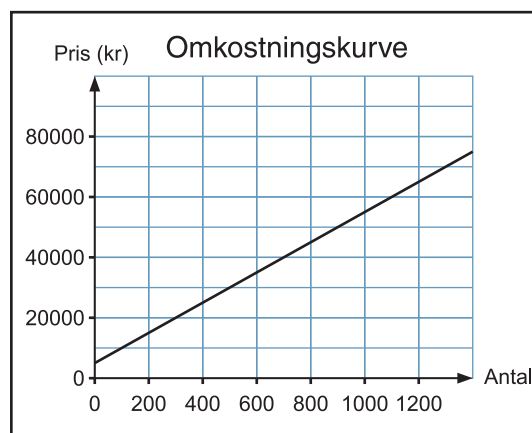
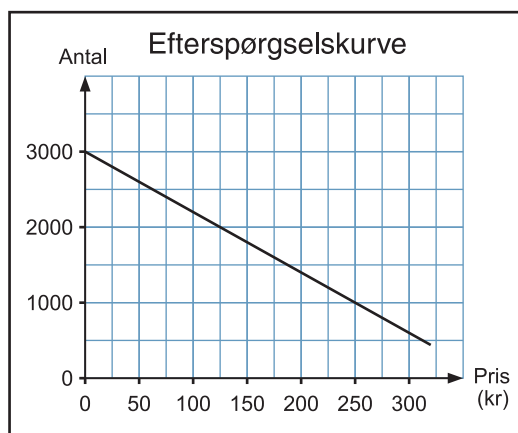


Projektopgaver i differentialregning

I skal besvare spørgsmålene i nedenstående to projektopgaver og skrive en lille rapport over det. I skal arbejde i par eller max tremandsgrupper, og der skal afleveres én rapport pr. par/gruppe. Med rapport menes, at der skal være sammenhængende og forklarende tekst til. Tankegangen og pointerne i de matematiske problemstillinger i henholdsvis den økonomiske og den biologiske model skal beskrives. I må gerne surfe lidt på Internettet for at få uddybet begreberne! Jeg udvælger på et tidspunkt to grupper til at holde et miniforedrag om de to emner, som om de kan præsenteres til en mundtlig eksamen!

Opgave 28 (Økonomisk model)

I det følgende vil vi betragte en simpel økonomisk model for en virksomhed. Når en virksomhed forsøger at sælge sine varer, så er prisfastsættelsen et vigtigt tema at overveje. Sættes prisen lavt, så kan der sælges mange styk, men fortjenesten pr. styk vil være mindre. Sættes prisen højere, så kan der normalt ikke afsættes så meget, men man tjener mere pr. styk. Det store spørgsmål er, hvad den optimale stykpris er? – underforstået den stykpris, som giver den største fortjeneste. Til at besvare dette spørgsmål behøves blandt andet viden om efterspørgslen og omkostningerne.



For at simplificere problemstillingen antager vi, at alle de producerede enheder sælges. Antal producerede enheder og antal solgte enheder er altså det samme. Vi antager, at efterspørgselsfunktionen, som angiver antal styk, x , er en lineært aftagende funktion af stykprisen p :

$$x = 3000 - 8 \cdot p \Leftrightarrow p = \frac{3000 - x}{8}$$

Omkostningerne kan deles op i de *variable omkostninger* og de *faste omkostninger*. De variable omkostninger afhænger af antal producerede enheder, og vi vil her antage, at de variable omkostninger er proportionale med antal producerede enheder: 80 kr. pr. enhed. De faste udgifter sættes her til 5000 kr. Vi har altså følgende *omkostningsfunktion*: $O(x) = 80 \cdot x + 5000$. *Indtægtsfunktionen* fås ved at multiplicere antal solgte enheder med salgsprisen pr. enhed: $I(x) = x \cdot p = x \cdot (3000 - x)/8$. Da fortjenesten er lig med indtægter fratrækket omkostninger, fås følgende *fortjenestefunktion*:

$$F(x) = I(x) - O(x) = x \cdot \left(\frac{3000 - x}{8} \right) - (80 \cdot x + 5000)$$

- Foretag en funktionsundersøgelse af fortjenestefunktionen. Hvad er den optimale stykpris at sætte på varen, og hvor mange enheder skal der produceres? Hvor stor er den samlede fortjeneste?
- Størrelserne $I'(x)$ og $O'(x)$ betegnes henholdsvis *marginalindtægterne* og *marginalomkostningerne*. Bestem de to størrelser for en produktion på 800 enheder. Hvad siger de to størrelser noget om, sagt med ord?
- Bestem marginalindtægterne og marginalomkostningerne for det antal enheder, som giver anledning til den optimale fortjeneste, bestemt i spørgsmål a). Hvad konkluderer du?
- Kan en voksende efterspørgselskurve tænkes? Diskutér!

Opgave 35 (Biologi: logistisk vækst)

I modeller, som beskriver populationer, støder man ofte på den såkaldte *logistiske model*. Årsagen til, at den tages op i så mange forskellige sammenhænge er, at den bygger på nogle ret generelle forudsætninger. For bedre at forstå den, er det fornuftigt først at se på den mere simple *eksponentielle model*. Lad $n(t)$ angive størrelsen af den aktuelle population til tiden t . Den eksponentielle model udtrykker, at hastigheden $n'(t)$, hvormed populationen vokser, er proportional med populationens størrelse: $n'(t) = k \cdot n(t)$. En meget naturlig antagelse: Hvis bestanden er dobbelt så stor, fødes der også dobbelt så mange nye individer, etc. Løsningen til denne ligning (differentialligning) er på formen $n(t) = b \cdot e^{k \cdot t}$. Det viser, at populationen under denne forudsætning vil udvikle sig eksponentielt. Imidlertid ved vi, at populationen ikke kan blive ved med at vokse mod uendelig. Ofte vil omgivelserne eller føden sætte en øvre grænse for, hvor stor populationen kan blive. Derfor indfører man en model, som kan tage hensyn til dette forhold. Den bygger på at hastigheden, hvormed populationen vokser, ikke blot er proportional med populationens egen størrelse, men også med hvor megen "råderum", der stadig er for vækst. Her gøres en antagelse om, at populationens grænse er en eller anden værdi G . Den logistiske model bygger altså på følgende *logistiske differentialligning*:

$$n'(t) = k \cdot n(t) \cdot (G - n(t))$$

Man kan vise, at løsningen til denne differentialligning er:

$$n(t) = \frac{G}{1 + c \cdot e^{-k \cdot G \cdot t}}$$

hvor c er en eller anden konstant, som afhænger af begyndelsesbetingelserne.



Der foretages et forsøg med nogle bakterier i en petriskål. Det viser sig, at populationen af bakterier udvikler sig, som angivet ved følgende funktion, hvor t regnes i timer:

$$n(t) = \frac{900}{1 + 10 \cdot e^{-0,35 \cdot t}}$$

- Undersøg udviklingen af bakterier over en 24 timers periode. Plot grafen og forsøg at forklare grafen ud fra teorien ovenfor: Hvorfor flader kurven ud? Hvorfor er *væksten* mindst i starten og til slut? Hvad sker der med populationen, når $t \rightarrow \infty$?
- Hvor mange bakterier er der fra start og efter 5 timer?
- Hvornår er populationen oppe på 800 bakterier?
- Bestem et udtryk for differentialkvotienten $n'(t)$.
- Bestem $n'(3)$ og fortæl, hvad den fortæller om bakteriekulturen.
- (Svær og frivillig) Bestem et udtryk for n'/n som funktion af n . Tegn en graf, som illustrerer denne sammenhæng. Hvad fortæller den noget om?