## Begrebet differentialkvotient

I dette lille dokument skal vi se på begrebet *differentiabel funktion* og *dif­fe­ren­tial­kvo­tient*. Som et eksempel bestemmer vi differentialkvotienten (i et hvert punkt) for anden­grads­polynomiet .



|  |
| --- |
| Definition af begrebet differentiabel funktion En funktion *f* siges at være *differentiabel* i et punkt , hvis *differenskvotienten*  (1)  har en grænseværdi for  gående imod 0 (vi skriver ). Denne grænseværdi kal­­des for funktionens *differentialkvotient* i  og betegnes med . Undertiden ser man også betegnelsen  for differentialkvotienten. |

Det er vigtigt at notere sig de grafiske fortolkninger af både differenskvotienten og dif­fe­rentialkvotienten. Førstnævnte kan fortolkes som *hældningen* af den *sekant*, som går igen­nem de to punkter *P* og  på grafen. Det illustrerer ovenstående figur. Når  går imod 0, så vil det *bevægelige* punkt *P* bevæge sig nærmere og nærmere ind mod det *faste* punkt . Hvis sekanternes hældning under denne proces har en grænseværdi, dvs. nærmer sig til et bestemt tal, så siges *f* at være differentiabel i  med denne græn­se­vær­di som dif­fe­ren­tialkvotient. Sidstnævnte betegnes .

|  |
| --- |
| Definition af tangent Hvis *f* er en funktion, som er differentiabel i et punkt , så kalder man den linje, der går igennem punktet  og har hældning lig med , for *tan­gen­ten* til grafen for *f* i punktet . |

Hvis *f* er differentiabel i , så vil man på en figur kunne se, at sekanterne nærmer sig til tangenten, når  nærmer sig til 0. Grænseværdien skrives undertiden med et særligt symbol, som kommer af det latinske navn for grænse, som er *limes*:

(2) 

I det følgende skal vi kigge på et eksempel på en funktion, der er differentiabel.

|  |
| --- |
| Sætning 1 Funktionen  er differentiabel i ethvert fast punkt  med differential­kvo­tient . |

*Bevis*: Vi starter med at opskrive differenskvotienten:

(3) 

Bemærk, at uanset hvad der står inde i parentesen i , så skal man overalt udskifte *x* med dette, for eksempel:  og . Det er ikke muligt uden videre at finde ud af om højresiden i (3) har en grænseværdi for . Vi er nødt til at *reducere* udtrykket først. Vi regner altså videre på (3):

(4) 

I sidste lighedstegn har vi divideret  op i hvert led i tælleren. Vi har nu reduceret dif­fe­renskvotienten så langt, som man kan. Derfor er det tid til at undersøge, om udtrykket har en grænseværdi for  gående imod 0. Det er heldigvis nemt. Man skal nemlig op­fat­te  som et *fast* tal – det bevæger sig ikke. Derimod vil . Det er ikke svært at se, at så vil . Da differenskvotienten rent faktisk har en græn­se­vær­di betyder, at vi kan konstatere, at *f* er differentiabel i  og at differentialkvotienten er lig med grænseværdien, dvs. .



Dette gælder altså for ethvert fast . Som et eksempel kunne vi sætte . Så vil vi have . Altså er tangentens hældning i  lig med 2.

|  |
| --- |
| Sætning 2 Givet to reelle tal *a* og *b*. Funktionen  er differentiabel i ethvert fast punkt  med differential­kvo­tient . |

*Bevis*: Differenskvotienten opskrives og reduceres:

(5) 

Trin 3 består i at undersøge om differenskvotienten har en grænseværdi for . Men dette er trivielt, for differenskvotienten afhænger slet ikke af , den er konstant lig med *a* hele tiden. Derfor er grænseværdien også lig med *a*:

(6) 

Vi konkluderer, at funktionen er differentiabel i  med differentialkvotient .



Resultatet i sætning 2 er ikke overraskende, da funktionens graf og dens tangent i  er sam­­menfaldende! Men det er en meget speciel situation. I det følgende skal vi udlede en for­­skrift for tangenten til grafen for en vilkårlig funktion, der er differentiabel i .

|  |
| --- |
| Sætning 3 Givet en funktion, der er differentiabel i et punkt . Da har tangenten til grafen for *f* i røringspunktet  ligningen:  (7) |

*Bevis*: En tangent er altid en *linje*, så den har ligningen , hvor *a* er hæld­­nings­koefficienten og  er et punkt på linjen. Vi udnytter nu, at tangentens hæld­­ning er , og at den rører grafen for *f* i punktet :

(7) 

Hvilket beviser det ønskede.



Lad os afslutningsvist kigge på et eksempel.

#### Eksempel

Bestem en ligning for tangenten til grafen for  i punktet .

*Løsning*: Først differentierer vi:  og indsætter dernæst  i både funk­tio­nen og dens differentialkvotient:

 og 

Det giver følgende ligning for tangenten:



