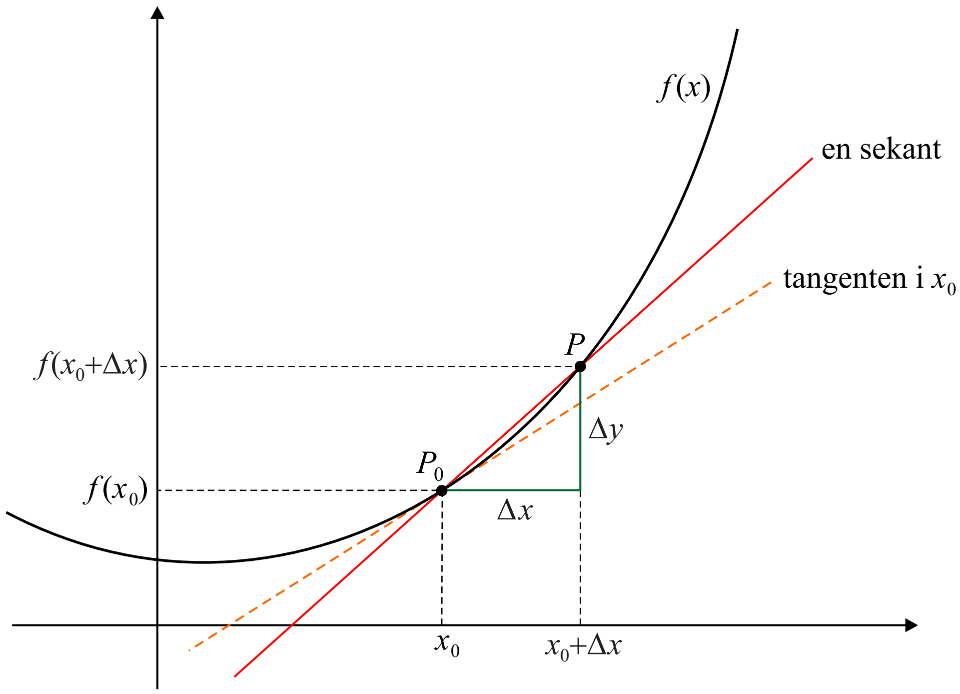
Begrebet differentialkvotient

I dette lille dokument skal vi se på begrebet *differentiabel funktion* og *differentialkvotient*. Som et eksempel bestemmer vi differentialkvotienten (i et hvert punkt) for andengradspolynomiet $f(x) = x^2$.



Definition af begrebet differentiabel funktion

En funktion *f* siges at være *differentiabel* i et punkt x_0, hvis *differenskvotienten*

(1) $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

har en grænseværdi for Δx gående imod 0 (vi skriver $\Delta x \to 0$). Denne grænseværdi kaldes for funktionens *differentialkvotient* i x_0 og betegnes med $f'(x_0)$. Undertiden ser man også betegnelsen dy/dx for differentialkvotienten.

Det er vigtigt at notere sig de grafiske fortolkninger af både differenskvotienten og differentialkvotienten. Førstnævnte kan fortolkes som *hældningen* af den *sekant*, som går igennem de to punkter P og P_0 på grafen. Det illustrerer ovenstående figur. Når Δx går imod 0, så vil det *bevægelige* punkt P bevæge sig nærmere og nærmere ind mod det *faste* punkt P_0. Hvis sekanternes hældning under denne proces har en grænseværdi, dvs. nærmer sig til et bestemt tal, så siges *f* at være differentiabel i x_0 med denne grænseværdi som differentialkvotient. Sidstnævnte betegnes $f'(x_0)$.

Definition af tangent

Hvis *f* er en funktion, som er differentiabel i et punkt x_0, så kalder man den linje, der går igennem punktet $P_0(x_0, f(x_0))$ og har hældning lig med $f'(x_0)$, for *tangenten* til grafen for *f* i punktet P_0.

Hvis *f* er differentiabel i x_0, så vil man på en figur kunne se, at sekanterne nærmer sig til tangenten, når Δx nærmer sig til 0. Grænseværdien skrives undertiden med et særligt symbol, som kommer af det latinske navn for grænse, som er *limes*:

(2) $$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$$

I det følgende skal vi kigge på et eksempel på en funktion, der er differentiabel.

Sætning 1

Funktionen $f(x) = x^2$ er differentiabel i ethvert fast punkt x_0 med differentialkvotient $f'(x_0) = 2x_0$.

Bevis: Vi starter med at opskrive differenskvotienten:

(3) $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x}$$

Bemærk, at uanset hvad der står inde i parentesen i $f(...)$, så skal man overalt udskifte *x* med dette, for eksempel: $f(x_0) = x_0^2$ og $f(x_0 + \Delta x) = (x_0 + \Delta x)^2$. Det er ikke muligt uden videre at finde ud af om højresiden i (3) har en grænseværdi for $\Delta x \to 0$. Vi er nødt til at *reducere* udtrykket først. Vi regner altså videre på (3):

(4) $$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x} = \frac{(x_0 + \Delta x)\cdot(x_0 + \Delta x) - x_0^2}{\Delta x} \\ &= \frac{x_0^2 + 2\cdot x_0 \cdot \Delta x + \Delta x \cdot \Delta x - x_0^2}{\Delta x} = \frac{2\cdot x_0 \cdot \Delta x + \Delta x \cdot \Delta x}{\Delta x} = 2\cdot x_0 + \Delta x \end{aligned}$$

I sidste lighedstegn har vi divideret Δx op i hvert led i tælleren. Vi har nu reduceret differenskvotienten så langt, som man kan. Derfor er det tid til at undersøge, om udtrykket har en grænseværdi for Δx gående imod 0. Det er heldigvis nemt. Man skal nemlig opfatte x_0 som et *fast* tal – det bevæger sig ikke. Derimod vil $\Delta x \to 0$. Det er ikke svært at se, at så vil $2\cdot x_0 + \Delta x \to 2\cdot x_0$. Da differenskvotienten rent faktisk har en grænseværdi betyder, at vi kan konstatere, at *f* er differentiabel i x_0 og at differentialkvotienten er lig med grænseværdien, dvs. $f'(x_0) = 2\cdot x_0$.

□

Dette gælder altså for ethvert fast x_0. Som et eksempel kunne vi sætte $x_0 = 1$. Så vil vi have $f'(1) = 2\cdot 1 = 2$. Altså er tangentens hældning i $x_0 = 1$ lig med 2.

Sætning 2

Givet to reelle tal a og b. Funktionen $f(x) = a \cdot x + b$ er differentiabel i ethvert fast punkt x_0 med differentialkvotient $f'(x_0) = a$.

Bevis: Differenskvotienten opskrives og reduceres:

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{\big(a\cdot(x_0+\Delta x)+b\big) - \big(a\cdot x_0 + b\big)}{\Delta x} \\
&= \frac{a\cdot(x_0+\Delta x)+b-a\cdot x_0 - b}{\Delta x} = \frac{a\cdot x_0 + a\cdot\Delta x + b - a\cdot x_0 - b}{\Delta x} \qquad (5)\\
&= \frac{a\cdot\Delta x}{\Delta x} = a
\end{aligned}$$

Trin 3 består i at undersøge om differenskvotienten har en grænseværdi for $\Delta x \to 0$. Men dette er trivielt, for differenskvotienten afhænger slet ikke af Δx, den er konstant lig med a hele tiden. Derfor er grænseværdien også lig med a:

$$(6) \qquad \frac{\Delta y}{\Delta x} = a \;\to\; a \quad \text{for} \quad \Delta x \to 0$$

Vi konkluderer, at funktionen er differentiabel i x_0 med differentialkvotient $f'(x_0) = a$.

□

Resultatet i sætning 2 er ikke overraskende, da funktionens graf og dens tangent i x_0 er sammenfaldende! Men det er en meget speciel situation. I det følgende skal vi udlede en forskrift for tangenten til grafen for en vilkårlig funktion, der er differentiabel i x_0.

Sætning 3

Givet en funktion, der er differentiabel i et punkt x_0. Da har tangenten til grafen for f i røringspunktet $P(x_0, f(x_0))$ ligningen:

$$(7) \qquad y = f'(x_0)\cdot(x - x_0) + f(x_0)$$

Bevis: En tangent er altid en *linje*, så den har ligningen $y - y_0 = a\cdot(x - x_0)$, hvor a er hældningskoefficienten og (x_0, y_0) er et punkt på linjen. Vi udnytter nu, at tangentens hældning er $f'(x_0)$, og at den rører grafen for f i punktet $(x_0, f(x_0))$:

$$(7) \qquad y - f(x_0) = f'(x_0)\cdot(x - x_0) \quad\Leftrightarrow\quad y = f'(x_0)\cdot(x-x_0) + f(x_0)$$

Hvilket beviser det ønskede.

□

Lad os afslutningsvist kigge på et eksempel.

Eksempel

Bestem en ligning for tangenten til grafen for $f(x) = x^2$ i punktet $P(3, f(3))$.

Løsning: Først differentierer vi: $f'(x) = 2x$ og indsætter dernæst $x_0 = 3$ i både funktionen og dens differentialkvotient:

$$f'(x_0) = f'(3) = 2 \cdot 3 = 6 \text{ og } f(x_0) = f(3) = 3^2 = 9$$

Det giver følgende ligning for tangenten:

$$y = 6 \cdot (x-3) + 9 \quad \Leftrightarrow \quad y = 6x - 18 + 9 \quad \Leftrightarrow \quad y = 6x - 9$$

□