Differentiabilitet og kontinuitet

I dette lille tillæg skal vi kigge på begrebet kontinuitet og vise, at der er en sammenhæng mellem begreberne differentiabilitet og kontinuitet.

Definition (Kontinuitet)

En funktion *f* siges at være *kontinuert* i punktet x_0, hvis der gælder:

(1) $$f(x) \to f(x_0) \ \text{ for } \ x \to x_0$$

Bemærkning

Vi har altså at gøre med et *fast* punkt x_0 og et bevægeligt punkt *x*. Sidstnævnte lader vi bevæge sig hen mod x_0. Man kunne også alternativt kalde det bevægelige punkt for $x_0 + \Delta x$ og så lade $\Delta x \to 0$. Da oversættes betingelsen for kontinuitet i x_0 til:

(2) $$f(x_0 + \Delta x) \to f(x_0) \ \text{ for } \ \Delta x \to 0$$

Egenskaben (2) er det samme som $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \to 0$ for $\Delta x \to 0$. Eftersom $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ kan vi formulere kontinuitetsbetingelsen på en tredje måde:

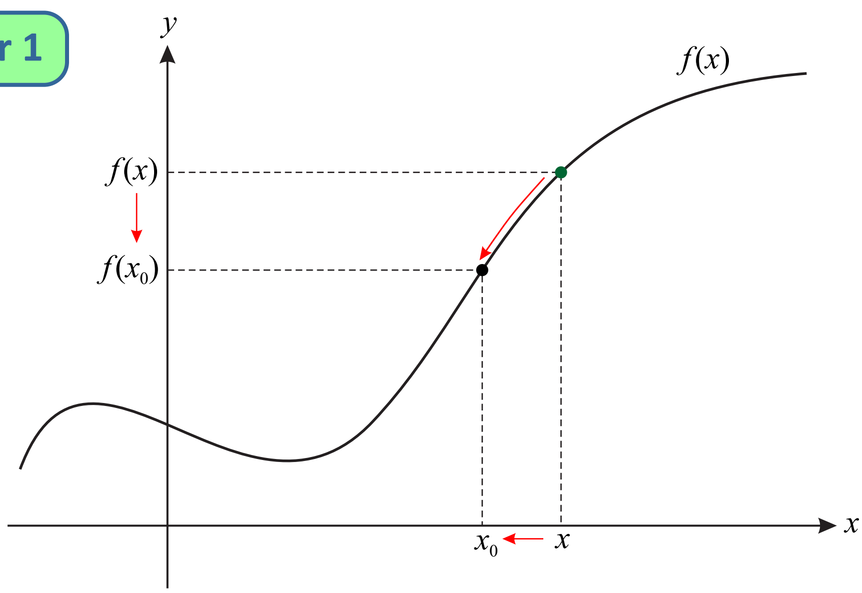
(3) $$\Delta y \to 0 \ \text{ for } \ \Delta x \to 0$$

Den siger at *y*-tilvæksten skal gå mod 0, når *x*-tilvæksten går mod 0. Hvilken af de tre formuleringer man vælger, er lidt en smagssag.

Grafisk forståelse

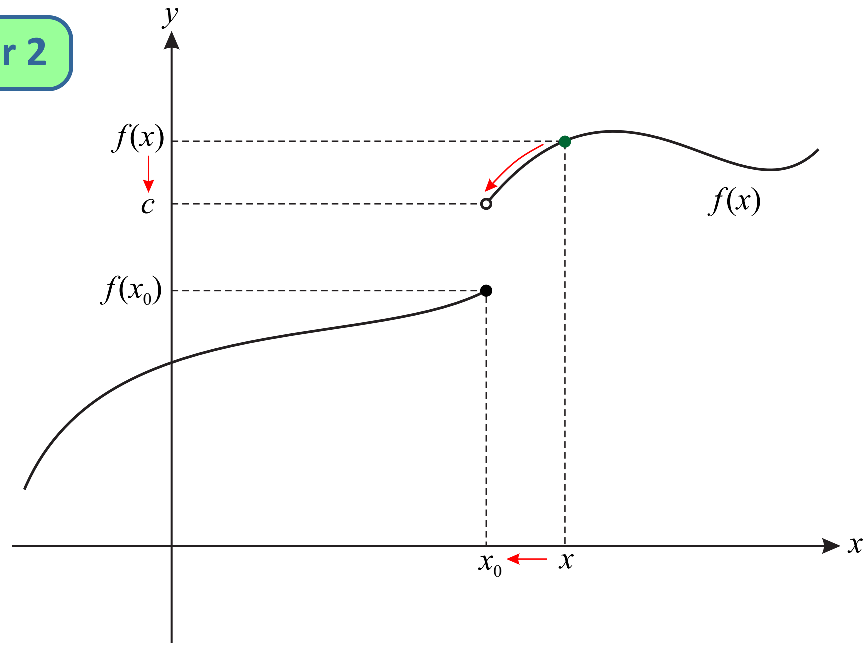
Vi skal kigge på situationen grafisk i et par eksempler. Hvis funktionen har grafen, som vist på figur 1 nedenfor, så er *f* kontinuert i x_0, for når det bevægelige punkt *x* bevæger sig hen imod x_0, så vil det grønne bevægelige grafpunkt bevæge sig ned imod det faste sorte grafpunkt. Altså vil $f(x)$ nærme sig til $f(x_0)$. Bemærk, at denne egenskab gælder uanset om *x* nærmer sig fra *venstre* eller fra *højre* ind mod x_0!

Figur 1



Lad os kigge på grafen for en anden funktion. På figur 2 nedenfor vil det grønne bevægelige grafpunkt bevæge sig ned mod punktet med den åbne bolle, såfremt x nærmer sig til x_0 fra højre. Det betyder at $f(x) \to c$ for $x \to x_0^+$ (plusset hentyder til at x nærmer sig fra højre). Men da $c \neq f(x_0)$, så er betingelse (1) ikke opfyldt. Hvis x nærmer sig fra venstre, vil det derimod gælde at $f(x) \to f(x_0)$ for $x \to x_0^-$. Da imidlertid grænseværdien skal være $f(x_0)$, når x nærmer sig til x_0 fra *både* højre og venstre, må vi konkludere, at *f ikke* er kontinuert i x_0.

Figur 2



En funktion er altså ikke kontinuert i x_0, hvis grafen foretager et spring i dette punkt! Vi skal slutte af med en sætning, der fortæller, at det er en stærkere betingelse at være differentiabel i et punkt x_0 end at være kontinuert i det samme punkt.

Sætning

Giver en funktion *f*. Hvis *f* er differentiabel i x_0, så er *f* også kontinuert i x_0.

Bevis: Hvis *f* er differentiabel i x_0, så har differenskvotienten $\Delta y / \Delta x$ en grænseværdi for $\Delta x \to 0$. Lad os kalde grænseværdien for *a*. Vi kan omskrive *y*-tilvæksten:

$$\Delta y \;=\; \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \Delta x \;\to a \cdot 0 = 0 \;\text{ for }\; \Delta x \to 0$$

Da *y*-tilvæksten går imod 0 for $\Delta x \to 0$, så er *f* kontinuert i x_0 ifølge formulering (3).

□