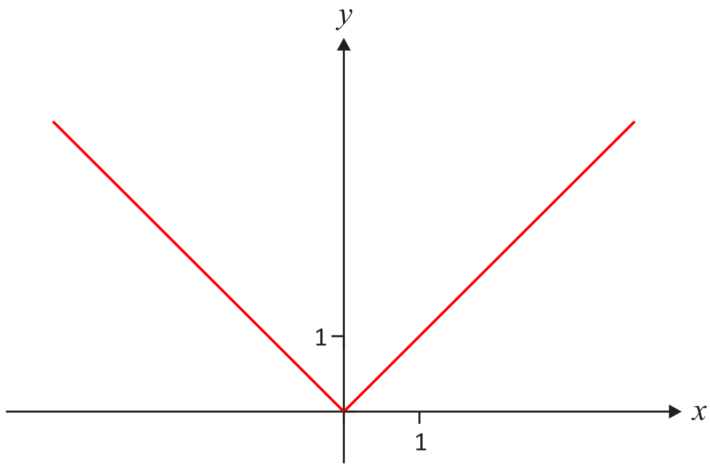
En ikke-differentiabel funktion

Vi skal i dette tillæg kigge på en funktion, som *ikke* er differentiabel, nærmere bestemt den funktion, som går under betegnelsen *numerisk x* og som kan skrives ved følgende gaffelforskrift:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{for } x \geq 0 \\ -x & \text{for } x < 0 \end{cases}$$

Den skrives også ofte $f(x) = |x|$. Grafen ser således ud:



Vi skal vise, hvorfor funktionen *ikke* er differentiabel i $x_0 = 0$. Vi starter med at kigge på differenskvotienten:

$$(1) \qquad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \frac{f(\Delta x) - 0}{\Delta x} = \frac{f(\Delta x)}{\Delta x}$$

For at undersøge hvad der sker, når $\Delta x \to 0$, er vi nødt til at splitte op i to tilfælde, fordi vi har at gøre med en gaffelforskrift. Lad os først undersøge, hvad der sker, når Δx nærmer sig til 0 fra højre, hvilket vi skriver som $\Delta x \to 0^+$. Når Δx er positiv, gælder den første del af gaffelforskriften, dvs. $f(\Delta x) = \Delta x$. Dermed fås:

$$(2) \qquad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(\Delta x)}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1 \to 1 \quad \text{for } \Delta x \to 0^+$$

Lad os dernæst kigge på, hvad der sker, når Δx nærmer sig til 0 fra venstre, hvilket vi skriver som $\Delta x \to 0^-$. Når Δx er negativ, gælder den anden del af gaffelforskriften, dvs. $f(\Delta x) = -\Delta x$. Dermed fås:

$$(3) \qquad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(\Delta x)}{\Delta x} = \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1 \to -1 \quad \text{for } \Delta x \to 0^-$$

Vi ser at differenskvotienten har forskellige grænseværdier, alt efter hvordan Δx nærmer sig til 0. Definitionen af differentialkvotient kræver, at det er den *samme* grænseværdi man har uanset, hvordan man nærmer sig til 0. Derfor må vi konkludere, at funktionen *ikke* er differentiabel i $x_0 = 0$.

Bemærkning 1

Problemet i $x_0 = 0$ er, at man i dette punkt ikke kan tegne en tangent til grafen, fordi grafen har et *knæk* her. Man kan lidt løst sige, at hvis grafen er ”glat” i et punkt, så er den også differentiabel her. Faktisk er funktionen ovenfor differentiabel i alle andre punkter end $x_0 = 0$, fordi man kan tegne en tangent her. Overvej hvad tangentens hældning er i punkter til højre for 0? Samme spørgsmål i punkter til venstre for 0?

Bemærkning 2

Vi har tidligere kigget på en sætning, som siger at hvis en funktion *f* er differentiabel i et punkt x_0, så er funktionen også kontinuert i dette punkt. Ovenstående funktion er et *modeksempel* til hypotesen om at sætningen skulle gælde den modsatte vej. Man kan altså *ikke* slutte, at hvis en funktion er kontinuert i et punkt, så er den også differentiabel i dette punkt. Vores funktion ovenfor er klart kontinuert i ethvert punkt, da grafen er sammenhængende, men funktionen er ikke differentiabel i punktet $x_0 = 0$. Det at være differentiabel er altså en stærkere egenskab end det at være kontinuert!