Eksponentielle funktioner

Billeder

Indholdsfortegnelse

1. Potenser og potensregler

Som bekendt betyder 5^2 at man ganger 5 med sig selv, så man får: $5^2 = 5 \cdot 5 = 25$. Man kan også *opløfte* til en højere potens. Hvis man for eksempel opløfter størrelsen a til n'te potens, betyder det:

(1) $$a^n = \overbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{n \text{ styk}}$$

altså at man ganger a med sig selv n gange. I udtrykket a^n kalder man a for *grundtallet* og n for *eksponenten*. Der gælder følgende potensregler:

(P1) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$	(P4) $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$	(P6) $a^0 = 1$
(P2) $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$	(P5) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$	(P7) $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$
(P3) $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$		

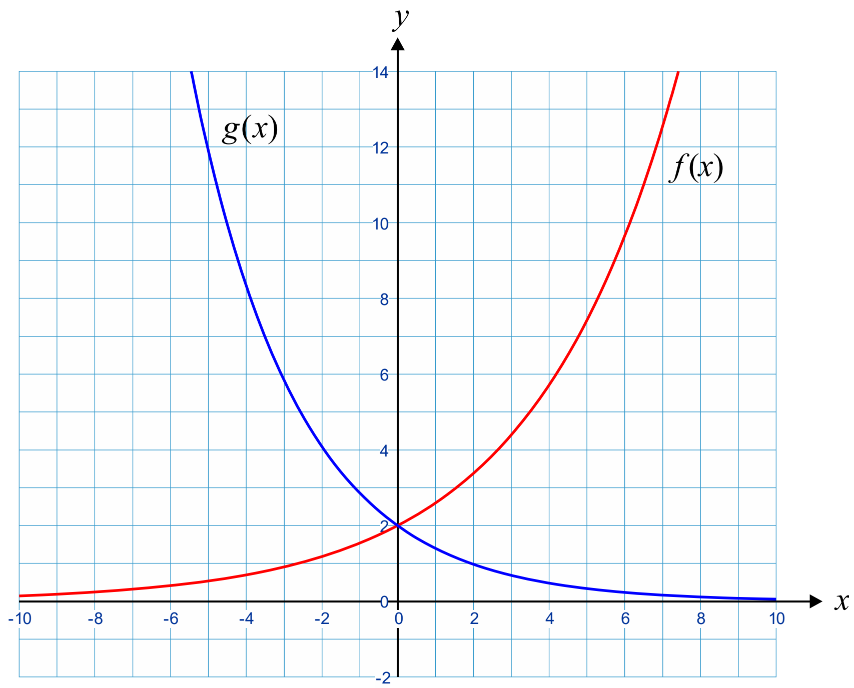
Bemærk, at de første tre regler handler om potenser, hvor *grundtallene* er ens, mens de næste to handler om regler, hvor *eksponenten* er ens! De sidste to regler er specielle derved, at det er rene definitioner. Ved hjælp af dem, får man de øvrige regneregler til at gælde generelt. Bogstavet P foran reglerne refererer til *potensreglerne*.

2. Eksponentielle funktioner

Vi har tidligere kigget på den familie af funktioner, som kaldes *lineære* og som har forskriften $f(x) = a \cdot x + b$. Her kan *parametrene* a og b være vilkårlige tal. På tilsvarende vis har vi familien af *eksponentielle funktioner*, hvis forskrift er på formen $f(x) = b \cdot a^x$, hvor a og b ligeledes er parametre. I denne note skal vi studere egenskaberne for denne nye type af funktioner. Overordnet bruges betegnelsen *eksponentiel vækst* om noget, som vokser meget hurtigt. Et godt eksempel er, hvis man forestiller sig at anbringe 1 mønt på et felt, og derefter at anbringe 2 mønter på næste felt, 4 mønter på det næste felt, etc.

Matematisk set kan man beskrive udviklingen i antal mønter ved funktionen $f(x)=2^x$, hvor x står for antal felter. I dette eksempel tillader vi altså kun hele ikke-negative tal som x. For hvert nyt felt fordobles antallet af mønter. Det svarer til, at $a=2$ og $b=1$.

Lad os se på det mere generelt, hvor a og b kan være et hvilket som helst *positivt* reelt tal, og hvor den variable x endda kan være et vilkårligt reelt tal. Nedenfor er tegnet graferne for de to eksponentielle funktioner $f(x)=2\cdot 1{,}3^x$ og $g(x)=2\cdot 0{,}7^x$.



Vi ser, at begge grafer skærer y-aksen i punktet (2,0). Som du måske kan gætte, har det noget med b-leddet at gøre. Men hvad siger grundtallet a noget om? I den næste sætning skal vi udlede nogle egenskaber for eksponentielle funktioner og deres grafer.

Sætning 1

a) Grafen skærer y-aksen i punktet $(0,b)$.
b) Når x vokser med 1, *fremskrives* (ganges) y med a.
c) Når x vokser med Δx, fremskrives (ganges) y med $a^{\Delta x}$.
d) Funktionen er *voksende*, når $a>1$, *aftagende* når $0<a<1$ og *konstant*, når $a=1$.

Bevis:

a) Alle punkter på y-aksen har x-koordinaten 0. Derfor indsætter vi 0 i forskriften:

$$f(0) \;=\; b\cdot a^0 \;=\; b\cdot 1 \;=\; b \qquad (2)$$

hvor vi har benyttet potensregel (P6). Vi konkluderer, at grafen skærer y-aksen i b.

b) Når man indsætter x i forskriften, får man naturligvis $f(x)=b\cdot a^x$. Indsætter man derimod $x+1$ i forskriften, fås følgende:

(3) $\qquad f(x+1) \;=\; b\cdot a^{x+1} \;=\; b\cdot a^{x}\cdot a^{1} \;=\; (b\cdot a^{x})\cdot a \;=\; f(x)\cdot a$

hvor vi har benyttet potensregel (P1). Vi konkluderer, at den nye y-værdi er a gange så stor som den oprindelige! Sagt på en anden måde, så vil en *x-tilvækst* på 1 betyde, at y fremskrives (ganges) med a.

c) Vi benytter samme idé som i b). Nu lægger vi blot Δx til x:

(4) $\qquad f(x+\Delta x) \;=\; b\cdot a^{x+\Delta x} \;=\; b\cdot a^{x}\cdot a^{\Delta x} \;=\; (b\cdot a^{x})\cdot a^{\Delta x} \;=\; f(x)\cdot a^{\Delta x}$

igen ved brug af potensregel (P1). Det viser det ønskede.

d) Vil vi overlade til læseren.

□

Eksempel 2

Vi kan bruge sætning 1 på eksemplet $f(x)=2\cdot 1{,}3^{x}$. Da $b=2$, fås $f(0)=2$, og eftersom $a=1{,}3$, vil funktionsværdien fremskrives (ganges) med 1,3, hver gang x vokser med 1. Det kan demonstreres ved følgende figur.

+1 +1 +1 +1 +1 +1

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	1,183	1,538	2	2,600	3,380	4,394	5,712

$\cdot$ 1,3 $\cdot$ 1,3 $\cdot$ 1,3 $\cdot$ 1,3 $\cdot$ 1,3 $\cdot$ 1,3

Egenskaben at y fremskrives med 1,3, hver gang x vokser med 1, gælder dog uanset den x-værdi man starter med. Vi kunne også vælge at øge x-værdien med 2. Ifølge sætning 1 c) skal y da fremskrives med $a^{\Delta x}=1{,}3^{2}=1{,}69$.

+2 +2 +2 +2 +2 +2

x	-4	-2	0	2	4	6	8
$f(x)$	0,700	1,183	2	3,380	5,712	9,654	16,315

$\cdot 1{,}3^2$ $\cdot 1{,}3^2$ $\cdot 1{,}3^2$ $\cdot 1{,}3^2$ $\cdot 1{,}3^2$ $\cdot 1{,}3^2$

Noget helt tilsvarende kan siges om det andet eksempel med $g(x)=2\cdot 0{,}7^{x}$. Det overlades til læseren at kigge på det.

□

Procentvis vækst

Hvis man vil *lægge* 30% *til* et beløb *B*, så ganger man som bekendt tallet med 30, dividerer det med 100 og lægger resultatet til det oprindelige beløb. Altså:

$$(5) \qquad B+B\cdot\frac{30}{100} \;=\; B+B\cdot 0{,}30 \;=\; B\cdot(1+0{,}30) \;=\; B\cdot 1{,}30$$

Omskrivningen af udtrykket viser, at vi lige så godt kunne have ganget det oprindelige beløb med 1,30. Hvis vi i stedet ønsker at *trække* 30% *fra* beløbet *B*, så får vi:

$$(6) \qquad B-B\cdot\frac{30}{100} \;=\; B-B\cdot 0{,}30 \;=\; B\cdot(1-0{,}30) \;=\; B\cdot 0{,}70$$

hvilket viser, at vi lige så godt kunne have ganget beløbet med 0,70. Bemærk i øvrigt, at *procent* betyder "per hundrede", så $30\% = \frac{30}{100} = 0{,}30$. I det følgende vil vi omtale størrelsen som *rentefoden* eller blot *renten r*. Vi kan håndtere ovenstående to processer under ét, hvis vi vælger at regne *renten r* positiv, hvis der lægges en procent til et tal og negativ, hvis der trækkes en procent fra et tal, og så ellers bare benytte følgende formel:

$$(7) \qquad S=(1+r)\cdot B$$

hvor *S* repræsenterer *slutværdien*. *B* betegner stadig *begyndelsesværdien*. Størrelsen man ganger med, altså $1+r$, kaldes *fremskrivningsfaktoren* – i øvrigt i fuld overensstemmelse med den samme betegnelse for *a* i en eksponentiel funktion, som vi snart skal se.

Eksempel 3

a) Læg 15% til tallet 200.
b) Træk 25% fra tallet 500.
c) Læg 30% til tallet 700 to gange efter hinanden. Kunne vi have nøjedes med at lægge en procent til bare én gang? I givet fald hvilken procent da?

Løsning:

a) Vi bruger formel (7) med $r=15\%=0{,}15$:

$$S \;=\; (1+r)\cdot B \;=\; (1+0{,}15)\cdot 200 \;=\; 1{,}15\cdot 200 \;=\; 230$$

b) Vi bruger formel (7) med $r=-25\%=-0{,}25$:

$$S \;=\; (1+r)\cdot B \;=\; (1+(-0{,}25))\cdot 500 \;=\; (1-0{,}25)\cdot 500 \;=\; 0{,}75\cdot 500 \;=\; 375$$

I a) og b) fik vi altså fremskrivningsfaktorerne henholdsvis 1,15 og 0,75.

c) Vi skal fremskrive beløbet med fremskrivningsfaktoren $1+r=1+0{,}30=1{,}30$ to gange, hvilket giver følgende:

$$S \;=\; (1+r)\cdot(1+r)\cdot B \;=\; (1+r)^2\cdot B \;=\; (1+0{,}30)^2\cdot 700 \;=\; 1{,}30^2\cdot 700 \;=\; 1183$$

Sidste spørgsmål: Hvis vi kigger på ovenstående udtryk, ser vi, at vi totalt set har fremskrevet det oprindelige beløb med $1{,}30^2=1{,}69$. Det svarer åbenlyst til at lægge 69% til! At svaret er mere end det dobbelte af 30% skyldes begrebet *renters rente*!

Definition 4

I en eksponentiel funktion $f(x) = b \cdot a^x$ kaldes a for *fremskrivningsfaktoren*, og størrelsen $r = a - 1$ kaldes for *vækstraten*.

Eksempel 5

Lad os for eksempel se på funktionen $f(x) = 2 \cdot 1{,}3^x$ fra eksempel 2. I dette eksempel så vi, at når x vokser med 1, så *fremskrives* eller ganges y-værdien med $a = 1{,}3$. Med ovenstående teori om procentvis vækst for øje, kan vi oversætte det til procentregning: At gange med 1,3 svarer til at lægge 30% til. Formelt set gør vi følgende:

$$a = 1 + r \quad \Leftrightarrow \quad r = a - 1 \tag{8}$$

og indsætter vi tal, får vi:

$$r \;=\; a - 1 \;=\; 1{,}3 - 1 \;=\; 0{,}3 \;=\; 0{,}3 \cdot 100\% \;=\; 30\%$$

Når x vokser med 1, vokser y-værdierne altså med 30%. Tabellen fra eksempel 2 kan dermed også fremstilles således, når man formulerer det i procenter:

+1 +1 +1 +1 +1 +1

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	1,183	1,538	2	2,600	3,380	4,394	5,712

+30% +30% +30% +30% +30% +30%

□

Eksempel 6

Vi har tidligere kigget på funktionen $g(x) = 2 \cdot 0{,}7^x$. Her er tale om en *aftagende* funktion, da $0 < a < 1$, jf. sætning 1 d). Lad os se på vækstraten:

$$r \;=\; a - 1 \;=\; 0{,}7 - 1 \;=\; -0{,}3 \;=\; -0{,}3 \cdot 100\% \;=\; -30\%$$

Hver gang x øges med 1, fremskrives (ganges) y-værdien altså med 0,7, hvilket er det samme som at sige, at y-værdien *aftager* med 30%.

□

Eksempel 7

Nedenfor er der vist eksempler på en række fremskrivningsfaktorer og deres tilhørende vækstrater. Udregningerne overlades til læseren:

a	1,07	1,40	0.90	2,50	0,994	10
r	7%	40%	–10%	150%	–0.6%	900%

Eksempel 8

Ifølge definition 4 vedrører vækstraten altid at x øges med 1, men hvad hvis x øges med 2 eller et andet tal? Da kan vi jf. sætning 1 c) bruge formlen $r_{\Delta x} = a^{\Delta x} - 1$. Er $\Delta x = 2$ fås for eksempel:

$$r_2 = 1{,}3^2 - 1 = 1{,}69 - 1 = 0{,}69 = 0{,}69 \cdot 100\% = 69\%$$

y-værdien vokser altså med 69%, når x vokser med 2.

Eksempel 9

Hvert år i 14 år vokser befolkningen i en by med 8%. Hvor mange procent er befolkningen vokset med over alle 14 år?

Løsning: Vækstraten er åbenlyst $r = 8\% = 0{,}08$. Det betyder at fremskrivningsfaktoren er givet ved $a = 1 + r = 1 + 0{,}08 = 1{,}08$. Fremskrivningsfaktoren over 14 år fås ved at opløfte til potensen 14. Trækker vi 1 fra, får vi dermed det ønskede, jf. eksempel 8:

$$r_{14} = a^{\Delta x} - 1 = 1{,}08^{14} - 1 = 1{,}94 = 1{,}94 \cdot 100\% = 194\%$$

Så væksten over alle 14 år er dermed 194%.

□

Eksempel 10

Hvert år falder værdien af en bestemt bil med 10%. Hvor meget falder værdien af bilen over en periode på 6 år?

Løsning: Vækstraten er $r = -10\% = -0{,}10$. Det betyder at fremskrivningsfaktoren er givet ved $a = 1 + r = 1 + (-0{,}10) = 1 - 0{,}10 = 0{,}90$. Fremskrivningsfaktoren over 6 år fås ved at opløfte i potensen 6. Trækker vi 1 fra, får vi dermed det ønskede:

$$r_6 = a^{\Delta x} - 1 = 0{,}90^6 - 1 = -0{,}469 = -0{,}469 \cdot 100\% = -46{,}9\%$$

Over en 6-årig periode er bilens værdi altså aftaget med 46,9% – ikke 60%!

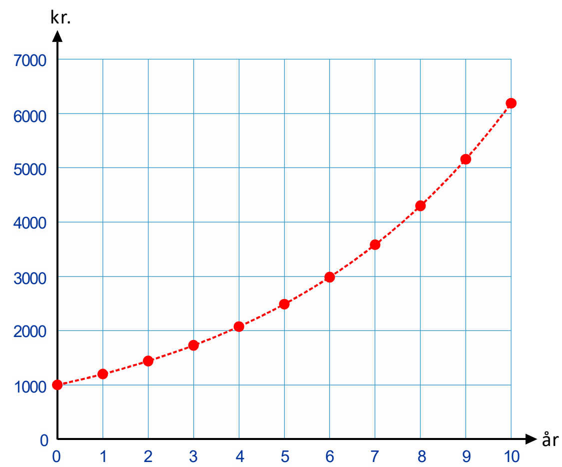
□

Eksempel 11 (Renteformlen)

Renteformlen $K = K_0 \cdot (1+r)^n$ repræsenterer faktisk en eksponentiel vækst, hvor K_0 svarer til b og $a = 1 + r$ og n svarer til x, dog med den begrænsning, at n kun kan antage heltallige værdier. Til højre er vist grafen for:

$$K = 1000 \cdot (1 + 0{,}20)^n = 1000 \cdot 1{,}20^n$$

Her er fremskrivningsfaktoren 1,20.



Ovenstående godtgør følgende:

Sætning 12

En eksponentiel funktion eller udvikling kan karakteriseres ved, at de samme tilvækster i x giver de samme *procentvise* tilvækster i y.

Vi har i tilfældet med lineære funktioner tidligere indset, at to punkter på grafen for en lineær funktion er tilstrækkeligt til at fastlægge den lineære funktion fuldstændigt. Vi skal nu se, at det samme er tilfældet for en eksponentiel funktion.

Sætning 13

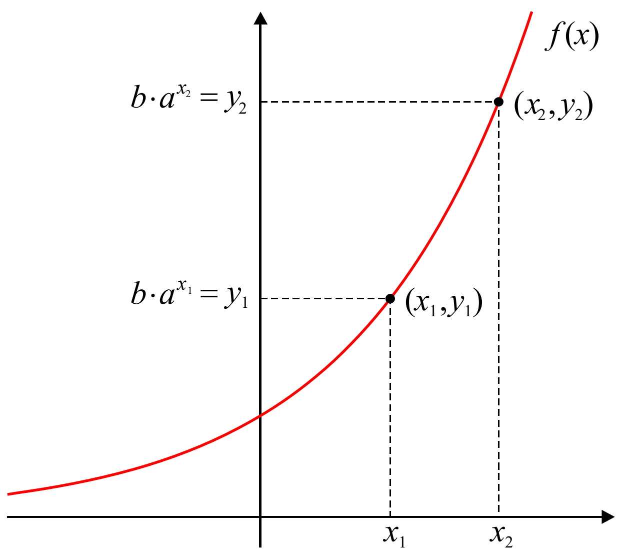
Lad (x_1, y_1) og (x_2, y_2) være to punkter på grafen for en eksponentiel funktion med forskrift $f(x) = b \cdot a^x$. Parametrene a og b kan da bestemmes af følgende formler:

(9) $$a = \sqrt[x_2 - x_1]{\frac{y_2}{y_1}} \quad , \quad b = \frac{y_1}{a^{x_1}}$$

Bevis: Da punkterne ligger på grafen, haves $y_1 = b \cdot a^{x_1}$ og $y_2 = b \cdot a^{x_2}$. Her kan man tænke på x_1, x_2, y_1 og y_2 som værende kendte. Derimod er a og b ukendte. Man ser snedigt, at man kan skaffe sig af med den ene ubekendte, b, ved at dividere de to y-værdier:

(10) $$\frac{y_2}{y_1} = \frac{b \cdot a^{x_2}}{b \cdot a^{x_1}} = \frac{a^{x_2}}{a^{x_1}} = a^{x_2 - x_1} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt[x_2 - x_1]{\frac{y_2}{y_1}} = a$$

hvor vi blandt andet har brugt potensregel (P2). For at isolere a tages den $(x_2 - x_1)$'te rod på begge sider. Formlen for b fås nemt ved at isolere b i ligningen $y_1 = b \cdot a^{x_1}$. Man dividerer blot med a^{x_1} på begge sider.



□

Eksempel 14

Givet punkterne $(-2,5)$ og $(5,30)$. Vi vil bestemme forskriften for den eksponentielle funktion, hvis graf går igennem de to punkter. Vi benytter formlerne (9) i sætning 13:

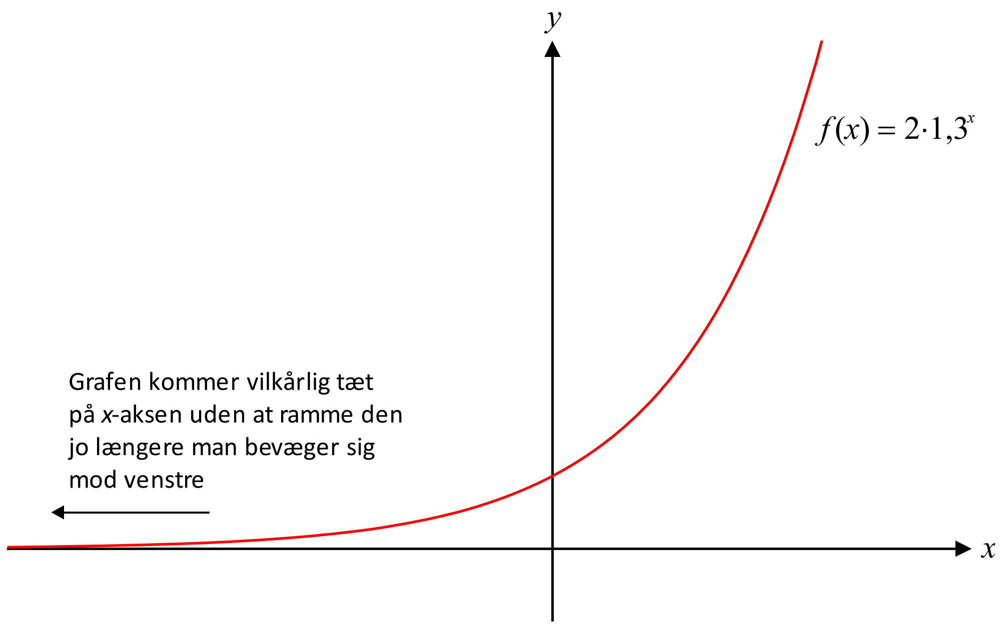
$$a = \sqrt[x_2-x_1]{\frac{y_2}{y_1}} = \sqrt[5-(-2)]{\frac{30}{5}} = \sqrt[7]{6} = 1{,}2917$$

$$b = \frac{y_2}{a^{x_2}} = \frac{30}{1{,}2917^5} = 8{,}3426$$

Dermed fås $f(x) = 8{,}3426 \cdot 1{,}2917^x$. Bemærk, at det er ligegyldigt hvilket punkt man benytter til at bestemme b med. Vi bruger punkt 2.

□

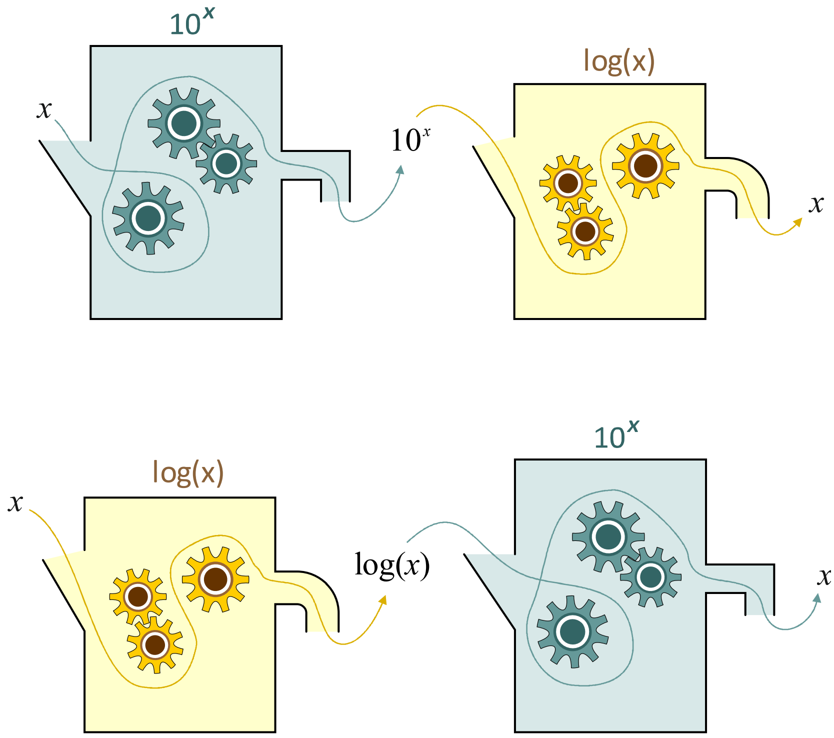
Før vi går videre, skal vi se på nogle yderligere egenskaber for eksponentielle funktioner. For det første kan man indsætte ethvert reelt tal i forskriften, dvs. $Dm(f) = R$. Derimod vil funktionsværdierne altid være positive, så værdimængden består af alle positive tal: $Vm(f) = R^+$. Endvidere er en eksponentiel funktion altid enten *voksende* (når $a > 1$) eller *aftagende* (når $0 < a < 1$), hvis den da ikke er *konstant* ($a = 0$). Lad os se på tilfældet med $f(x) = 2 \cdot 1{,}3^x$ fra begyndelsen af afsnit 2. For det første er funktionen voksende, eftersom $a = 1{,}3 > 1$. Men vi har endda, at $f(x) \to \infty$ for $x \to \infty$. Der er altså ingen grænse for, hvor store y-værdier, man kan få, bare man vælger x stor nok. På tilsvarende vis gælder $f(x) \to 0$ for $x \to -\infty$. Når x nærmer sig til minus uendelig $(-\infty)$, vil y-værdierne nemlig nærme sig til 0. Vi ser det ved, at grafen nærmer sig til x-aksen. Man siger med et fint ord, at f har en *vandret asymptote* med ligning $y = 0$ (x-aksen).



Overvej, hvad der mon gælder for funktionen $g(x) = 2 \cdot 0{,}7^x$?

3. Titalslogaritmen

Betragt den eksponentielle funktion 10^x med grundtal $a = 10$ og $b = 1$. Den har en *omvendt funktion* eller *invers funktion*, som kaldes *titalslogaritmen* og betegnes $\log(x)$. Med en omvendt eller invers funktion til en given funktion menes løst sagt en funktion, som "ophæver virkningen af den oprindelige funktion". Man kan generelt set tænke på en funktion, som en slags "maskine", som man kan fodre med et x og få et y ud. Et givet input x vil altid resultere i det samme y som output.



I den øverste del af figuren er illustreret, hvordan x fodres til maskinen repræsenterende funktionen 10^x. Outputtet er selvfølgelig 10^x og det fodres så videre til titalslogaritmefunktionen, som "spytter" x ud. Sammensætningen af de to funktioner er altså identiteten, dvs. der sker ikke noget med x. I matematisk sprog kan vi skrive det:

(11) $$\log(10^x) \;=\; x \quad \text{for } x \in R$$

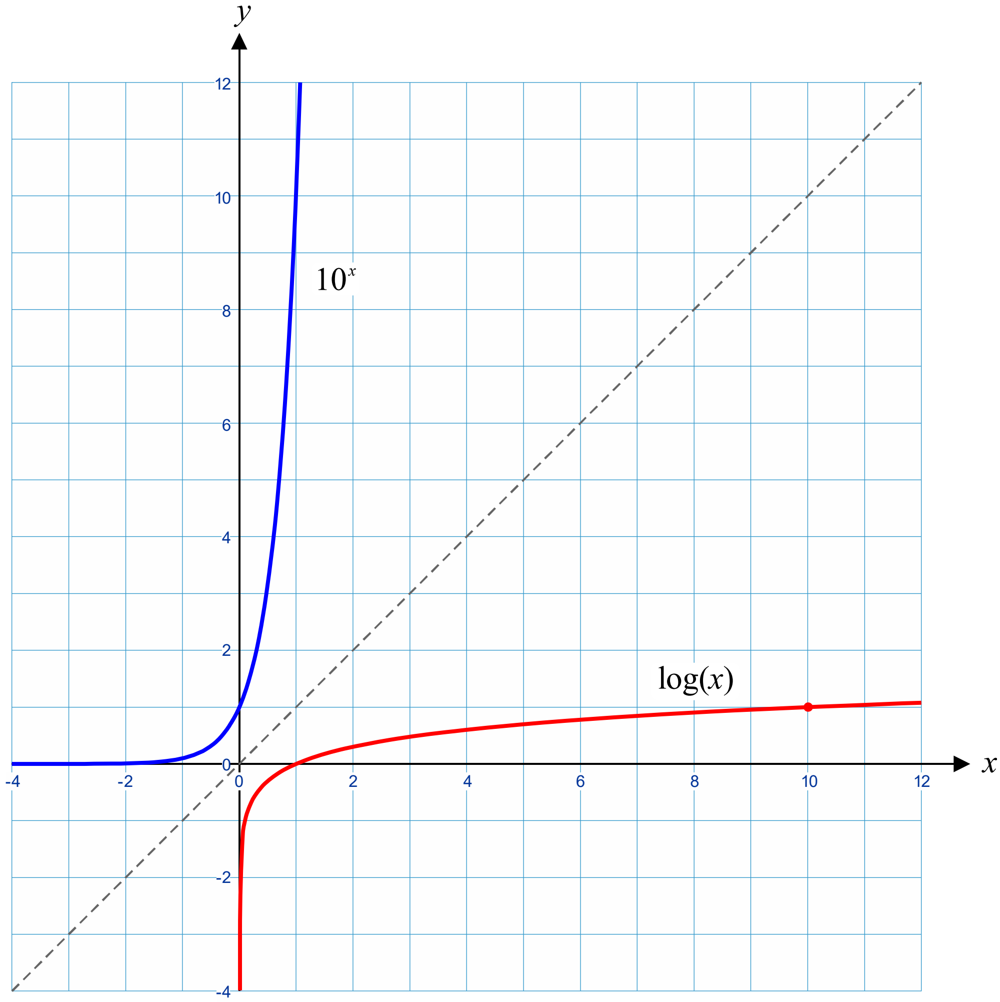
Først udregnes "indmaden" 10^x, derefter anvendes logaritmefunktionen derpå, hvorved man kommer tilbage til det, man startede med, dvs. x.

I nederste linje af figuren anvender vi funktionerne i den modsatte rækkefølge: x fodres først til logaritmefunktionen, som giver $\log(x)$ som output. Denne værdi sendes så videre til eksponentialfunktionen 10^x, og man får x ud igen. Matematisk kan det skrives:

(12) $$10^{\log(x)} \;=\; x \quad \text{for } x \in R^+$$

Først tages titalslogaritmen, derefter anvendes eksponentialfunktionen.

På samme måde, som 10^x er den omvendte funktion til $\log(x)$, så gælder det naturligvis også omvendt, at, 10^x er en omvendt funktion til $\log(x)$. Historisk set blev logaritmerne faktisk indført først. I nogle sammenhænge betegnes 10^x derfor som *antilogaritmen*.



Ovenfor er vist graferne for 10^x og $\log(x)$. Det er ingen tilfældighed, at graferne er hinandens spejlbillede i linjen $y = x$. Det hænger sammen med, at x og y så at sige skifter rolle, da de er hinandens omvendte funktioner. Vi ser desuden, at definitionsmængden og værdimængden for titalslogaritmen er henholdsvis $Dm(\log) = R^+$, altså mængden af alle positive tal, og $Vm(f) = R$, mængden af alle reelle tal.

Logaritmen har nogle pæne funktionsværdier i alle x-værdier, som er hele tipotenser. For eksempel haves følgende, idet vi i andet lighedstegn benytter regel (11):

$$\begin{aligned} &\cdots \\ \log(0{,}01) &= \log(10^{-2}) = -2 \\ \log(0{,}1) &= \log(10^{-1}) = -1 \\ \log(1) &= \log(10^{0}) = 0 \\ \log(10) &= \log(10^{1}) = 1 \\ \log(100) &= \log(10^{2}) = 2 \\ &\cdots \end{aligned}$$

Titalslogaritmefunktionen er en voksende funktion, og der gælder $f(x) \to \infty$ for $x \to \infty$. Funktionen vokser dog meget langsomt mod uendelig. Desuden gælder, at funktionsværdierne nærmer sig til minus uendelig, når x nærmer sig til 0 fra højre. Det kan skrives $f(x) \to -\infty$ for $x \to 0^+$. Dette betyder, at funktionen har det, man kalder en lodret asymptote $x = 0$. I det følgende skal vi udlede nogle yderst vigtige regler for logaritmefunktionen. Bogstavet L i reglerne refererer til, at det er logaritmeregler. Det eneste vi i øjeblikket ved om titalslogaritmen er, at den er den omvendte funktion til 10^x. Derfor er det ikke overraskende, at vi udleder logaritmereglerne ved brug af potensreglerne fra afsnit 1 (angivet med P for Potensregler).

Sætning 15 (Logaritmeregneregler)

Om logaritmefunktionen gælder følgende regler:

(L1) $\log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b)$ for $a, b \in R_+$

(L2) $\log(a/b) = \log(a) - \log(b)$ for $a, b \in R_+$

(L3) $\log(a^x) = x \cdot \log(a)$ for $a \in R_+$, $x \in R$

Bevis: Lad os udlede den første logaritmeregel, (L1):

$$\log(a \cdot b) \;=\; \log\left(10^{\log(a)} \cdot 10^{\log(b)}\right) \;=\; \log\left(10^{\log(a)+\log(b)}\right) \;=\; \log(a) + \log(b)$$

hvor vi i første lighedstegn har udnyttet, at a og b kan skrives som henholdsvis $10^{\log(a)}$ og $10^{\log(b)}$ ifølge (12). Andet lighedstegn fås ved at benytte potensregel (P1). Endelig fås tredje lighedstegn ved at udnytte (11), dvs. at 10^x og log ophæver hinandens virkning. Logaritmeregel (L2) bevises på helt analog vis. Lad os slutte af med at bevise logaritmeregel (L3):

$$\log(a^x) \;=\; \log\left(\left(10^{\log(a)}\right)^x\right) \;=\; \log\left(10^{x \cdot \log(a)}\right) \;=\; x \cdot \log(a)$$

hvor vi i første lighedstegn har udnyttet, at a kan skrives som $10^{\log(a)}$. I andet lighedstegn udnyttes potensregel (P3), og endelig fås tredje lighedstegn igen ved at benytte (11).

□

Ved hjælp af logaritmereglerne bliver man pludseligt i stand til at løse en række nye problemstillinger. En af dem er at bestemme x, når man kender y for en eksponentiel funktion, altså at løse en ligning af formen $b \cdot a^x = y$, hvor alle størrelser undtagen x er kendte. Med CAS-værktøj er det i dag ingen sag, da man typisk anvender en *solve*-kommando. Vi skal dog give et enkelt eksempel på, hvordan man kan løse en sådan ligning. Problemstillingen bliver nemlig også relevant i forbindelse med forskellige beviser.

Eksempel 16

Løs ligningen $4 \cdot 1{,}25^x = 7$.

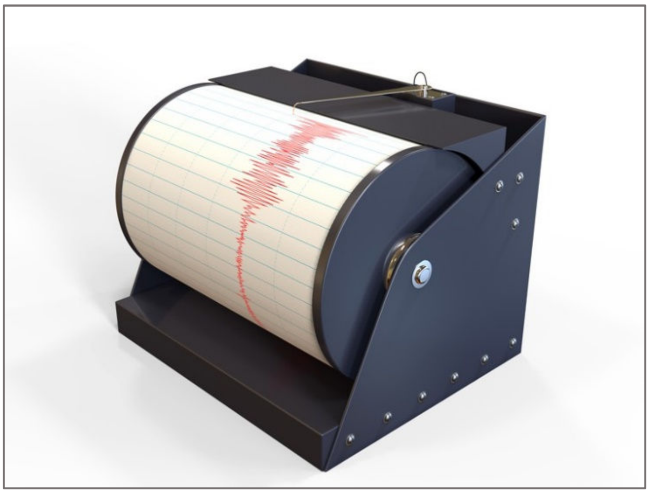
Løsning:

$$
\begin{aligned}
4 \cdot 1{,}25^x &= 7 \\
&\Updownarrow \\
1{,}25^x &= \tfrac{7}{4} \\
&\Updownarrow \\
\log(1{,}25^x) &= \log(\tfrac{7}{4}) \\
&\Updownarrow \\
x \cdot \log(1{,}25) &= \log(\tfrac{7}{4}) \\
&\Updownarrow \\
x &= \frac{\log(\tfrac{7}{4})}{\log(1{,}25)} = 2{,}5079
\end{aligned}
$$

Først divideres med 4 på begge sider af lighedstegnet, så vi har en ren potens på venstre side. Fra linje 2 til linje 3 har vi taget logaritmen på begge sider af lighedstegnet. Fra linje 3 til linje 4, har vi benyttet logaritmeregel (L3). Endelig er der fra linje 4 til linje 5 divideret med $\log(1{,}25)$ på begge sider af lighedstegnet.

□

Eksempel 17 (Seismograf og Richtertal)



I 1935 indførte *Charles F. Richter* i samarbejde med *Beno Gutenberg* den berømte *Richter-skala* til beskrivelse af størrelsen af et jordskælv. På et tidspunkt overvejede Richter at lade udslagets størrelse på en *seismograf* – med en passende korrektion for afstanden til jordskælvet – være et udtryk for jordskælvets størrelse. Imidlertid viste det sig, at forskellen på de mindste og største jordskælv var for store. Richters samarbejdspartner Gutenberg foreslog så at afbilde udslagene logaritmisk. Richter var begejstret og det viste sig, at man nu på en hensigtsmæssig måde kunne rangere de forskellige jordskælv. Samtidigt tiltalte det ham, at man også i astronomi havde indført en såkaldt *størrelsesklasse* for en stjerne ved hjælp af logaritmer. Ved at bruge logaritmer i definitionen, kunne han nemmere adskille de mange mindre jordskælv fra de få større jordskælv, der på den tid indtraf i Californien. Sammenhængen mellem energien E udløst ved jordskælvet og Richtertallet M, hvor energien regnes i J (Joule) viser sig at være givet ved følgende formel:

(13) $$\log(E) = 1{,}5 \cdot M + 4{,}8$$

a) I Danmark bliver jordskælvene heldigvis ikke ret store, blandt andet fordi Danmark *ikke* befinder sig på randen af nogle af pladerne, som udgør Jordens overflade. Alligevel forekommer der små jordskælv i Danmark, selv om de ofte dårlig kan mærkes. Blandt de skælv, som kan nævnes, var der blandt andet et jordskælv af styrke 4,0 på Richterskalaen, som blev registreret på Thyholm, Mors og det vestligste Salling den 4. december 1997. Bestem den energi, som blev udløst ved skælvet.

b) Det berømte jordskælv i San Francisco den 18. april 1906 er efterfølgende blevet vurderet til omkring 8,1 på Richter-skalaen. Hvor stor en energi blev frigjort?

c) Hvis et jordskælv udløser en energi på $5{,}2 \cdot 10^{15}\ \mathrm{J}$, hvor kraftigt er skælvet da på Richter-skalen?

d) Hvor mange gange større var den energi, som blev frigjort ved San Francisco jordskælvet i 1906 sammenlignet med jordskælvet i Danmark i 1997? Kan du besvare spørgsmålet udelukkende ud fra forskellen i Richtertal?

Løsning:

a) Vi benytter antilog på begge sider af formel (13) ovenfor:

$$E = 10^{1{,}5 \cdot M + 4{,}8} = 10^{1{,}5 \cdot 4{,}0 + 4{,}8} = 10^{10{,}8} = 6{,}3 \cdot 10^{10} \text{ (i enheden Joule).}$$

b) På samme måde som i spørgsmål a):

$$E = 10^{1{,}5 \cdot M + 4{,}8} = 10^{1{,}5 \cdot 8{,}1 + 4{,}8} = 10^{16{,}95} = 8{,}9 \cdot 10^{16} \text{ (i enheden Joule).}$$

c) Vi skal have isoleret M i formel (13):

$$\log(E) = 1{,}5 \cdot M + 4{,}8 \quad \Leftrightarrow \quad \log(E) - 4{,}8 = 1{,}5 \cdot M \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\log(E) - 4{,}8}{1{,}5} = M$$

$$M = \frac{\log(E) - 4{,}8}{1{,}5} = \frac{\log(5{,}2 \cdot 10^{15}) - 4{,}8}{1{,}5} = 7{,}3$$

Skælvet har altså et Richtertal på 7,3.

d) Man kan naturligvis bestemme forholdet ved at dividere resultatet i spørgsmål b) med resultatet i spørgsmål a), men det kan også gøres på følgende måde: Betegn de to Richter-tal med henholdsvis M_1 og M_2, og de tilsvarende energier med henholdsvis E_1 og E_2. Da kan vi udregne forholdet mellem de to energier på følgende måde:

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{10^{1{,}5 \cdot M_2 + 4{,}8}}{10^{1{,}5 \cdot M_1 + 4{,}8}} = 10^{1{,}5 \cdot M_2 + 4{,}8 - 1{,}5 \cdot M_1 - 4{,}8} = 10^{1{,}5 \cdot M_2 - 1{,}5 \cdot M_1}$$

$$= 10^{1{,}5 \cdot (M_2 - M_1)} = 10^{1{,}5 \cdot (8{,}1 - 4{,}0)} = 1{,}41 \cdot 10^{6}$$

Altså blev der ved San Francisco jordskælvet udløst ca. 1,4 million gange så meget energi, som det relativt kraftige jordskælv i Danmark i 1997.

NB! Igen kunne ovenstående spørgsmål løses med en *solve*-kommando i et CAS-værktøj. Udregningerne er foretaget "manuelt" her for at demonstrere logaritmefunktionernes og eksponentialfunktionernes anvendelsesmuligheder.

4. Fordoblings og halveringskonstanter

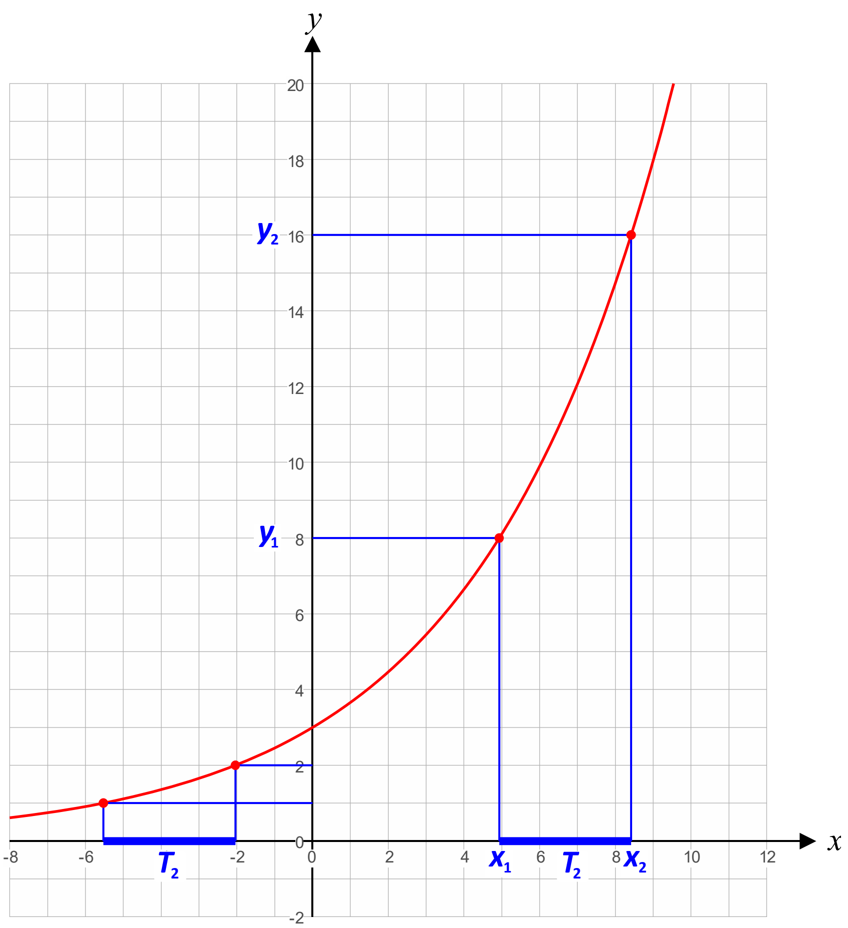
I dette afsnit skal vi se en vigtig egenskab, som gælder for eksponentielle funktioner. Hvis den eksponentielle funktion er *voksende* $(a > 1)$ har funktionen en såkaldt *fordoblingskonstant*, ofte betegnet med T_2 eller bare T. Hver gang man øger x med T_2 vil funktionsværdien fordobles. Tilsvarende har en *aftagende* eksponentiel funktion $(0 < a < 1)$ en *halveringskonstant*, som benævnes $T_{0.5}$ eller bare T. Hver gang man øger x med $T_{0.5}$ vil funktionsværdien halveres. Det er kun eksponentielle funktioner, som har disse smukke egenskaber! Begreberne giver dermed ikke rigtig mening for andre typer funktioner.

Eksempel 18

Figuren viser grafen for en voksende eksponentiel funktion. Vi skal *aflæse* fordoblingskonstanten ved at vælge to y-værdier, hvor den ene er dobbelt så stor, som den anden. Vi vælger $y_2 = 16$ og $y_1 = 8$. Dernæst aflæser vi de tilhørende x-værdier så godt vi kan og får henholdsvis $x_2 = 8{,}4$ og $x_1 = 4{,}9$. Fordoblingskonstanten er da:

(14) $$T_2 = x_2 - x_1 = 8{,}4 - 4{,}9 = 3{,}5$$

For at demonstrere egenskaben er der yderligere markeret to punkter, hvor den ene y-værdi er dobbelt så stor som den anden, nemlig 2 og 1. De tilhørende x-værdier aflæses til henholdsvis –2,0 og –5,5. Det giver $T_2 = x_2 - x_1 = -2{,}0 - (-5{,}5) = 3{,}5$, altså det samme, som forventet.



□

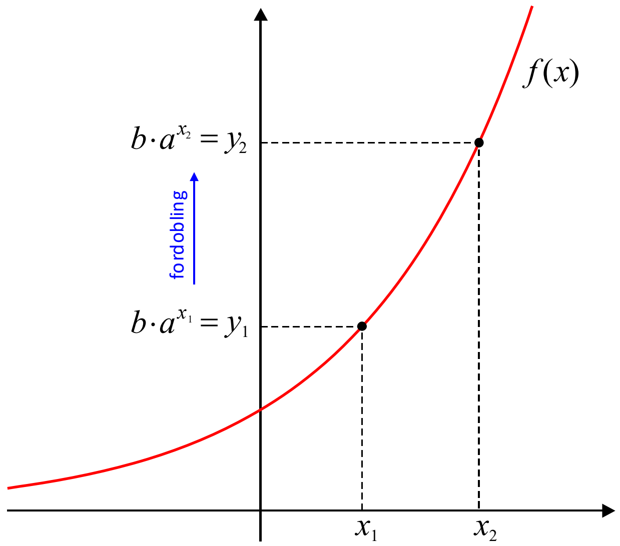
Aflæsning af halveringskonstanter for aftagende eksponentielle funktioner fungerer på analog måde, og overlades til læseren. Men som nævnt er aflæsninger normalt ikke nøjagtige, ligesom man heller ikke altid har en graf til rådighed. Vi skal vise en sætning, der kan give fordoblingskonstanten eksakt ud fra viden om fremskrivningsfaktoren *a*.

Sætning 19 (Fordoblingskonstant)

For en voksende eksponentiel funktion $f(x) = b \cdot a^x$ (dvs. $a > 1$) kan fordoblingskonstanten bestemmes ved brug af følgende formel:

(15) $$T_2 = \frac{\log(2)}{\log(a)}$$

Bevis: Vi vælger to *y*-værdier, y_1 og y_2, hvor y_2 er dobbelt så stor som y_1. De tilhørende *x*-værdier betegner vi henholdsvis x_1 og x_2.



Vi får den gode idé at dividere de to *y*-værdier med hinanden. Det får nemlig konstantleddet *b* til at gå ud, samtidigt med, at vi kan udnytte, at den ene *y*-værdi er dobbelt så stor som den anden:

(16) $$2 = \frac{y_2}{y_1} = \frac{b \cdot a^{x_2}}{b \cdot a^{x_1}} = \frac{a^{x_2}}{a^{x_1}} = a^{x_2 - x_1}$$

Vi skal her lade, som om vi kender *a*, men ikke $x_2 - x_1$. Sidstnævnte er faktisk fordoblingskonstanten, som vi skal bestemme: $T_2 = x_2 - x_1$. Vi får af (16):

(17) $$a^{T_2} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \log\left(a^{T_2}\right) = \log(2) \quad \Leftrightarrow \quad T_2 \cdot \log(a) = \log(2) \quad \Leftrightarrow \quad T_2 = \frac{\log(2)}{\log(a)}$$

Første skridt: logaritmen tages på begge sider af lighedstegnet. Andet skridt: Logaritmeregel (L3) er anvendt. Sidste skridt: Der divideres med $\log(a)$ på begge sider af lighedstegnet. Det ønskede er dermed vist.

□

Eksempel 20

I eksempel 18 var forskriften ikke oplyst. Kun grafen var til rådighed. Nu kan det så oplyses, at forskriften var $f(x) = 3 \cdot 1{,}22^x$. Vi kan nu bestemme fordoblingskonstanten via formel (15):

$$T_2 = \frac{\log(2)}{\log(a)} = \frac{\log(2)}{\log(1{,}22)} = 3{,}4856$$

Vores aflæsninger i eksempel 18 gav en fordoblingskonstant på 3,5, hvilket var ret godt, men altså ikke nøjagtig!

□

Sætning 21 (Halveringskonstant)

For en aftagende eksponentiel funktion $f(x) = b \cdot a^x$ (dvs. $0 < a < 1$) kan halverings-konstanten bestemmes ved brug af følgende formel:

(18) $$T_{0.5} = \frac{\log(\frac{1}{2})}{\log(a)}$$

Bevis: Overlades til læseren.

□

Eksempel 22

Bestem halveringskonstanten for den eksponentielle funktion $f(x) = 17 \cdot 0{,}56^x$.

Løsning: Vi benytter formlen (18):

$$T_{0.5} = \frac{\log(\frac{1}{2})}{\log(a)} = \frac{\log(\frac{1}{2})}{\log(0{,}56)} = 1{,}195$$

Så halveringskonstanten er 1,195.

□

Bemærkning 23

Formlerne for fordoblings- og halveringskonstanten er naturligvis gode at bruge, både hvis man har en simpel lommeregner eller et CAS-værktøj til rådighed. Har man et CAS-værktøj, kan man alternativt vælge at bestemme fordoblingskonstanten ved at løse en ligning med *solve*-kommandoen i stil med:

$$solve(f(x+T) = 2 \cdot f(x), T)$$

Det kræver naturligvis, at man først har defineret funktionen i værktøjet. Overvej hvilken idé der ligger bag kommandoen, og hvordan den skal se ud, hvis det alternativt er halveringskonstanten, man leder efter?

□

5. Den naturlige eksponential- og logaritmefunktion

Der findes en eksponentialfunktion, som benævnes den *naturlige eksponentialfunktion* og som skrives e^x. Dens grundtal er det lidt underlige tal $e = 2{,}7182818\ldots$. Begrundelsen for, at det er specielt naturligt, vil først fremgå, når man kommer til *differentialregningen*.

På samme måde som titalslogaritmen $\log(x)$ er en omvendt funktion til 10^x, så har den naturlige eksponentialfunktion e^x en omvendt funktion, og den kaldes $\ln(x)$. Den kaldes for den *naturlige logaritmefunktion*. Analogt til (11) og (12) haves dermed:

(19) $$\ln(e^x) \;=\; x \quad \text{for } x \in R$$

(20) $$e^{\ln(x)} \;=\; x \quad \text{for } x \in R^+$$

fordi $\ln(x)$ og e^x ophæver hinandens virkning. Den naturlige logaritmefunktion adlyder i øvrigt de samme logaritmeregler som titalslogaritmen nævnt i sætning 15. Desuden skal det nævnes, at den naturlige eksponentialfunktion ofte skrives $\exp(x)$.

Hidtil har vi kun diskuteret eksponentielle funktioner angivet på formen $f(x) = b \cdot a^x$. Der er imidlertid to andre former, som bruges meget, særligt i forbindelse med modeller fra den virkelig verden. Når man skal håndtere *enheder*, hvad enten det er i fysik, kemi eller et hvilket som helst andet naturvidenskabeligt fag, så foretrækkes det ofte at man anvender følgende form for en eksponentiel funktion:

(21) $$f(x) \;=\; b \cdot e^{k \cdot x}$$

hvori den naturlige eksponentialfunktion indgår. For det første bør man gøre sig klart, at man kun kan opløfte et tal i en potens, som er et rent tal, ikke et tal med enheder. Det smarte ved formen (21) er da, at hvis x for eksempel regnes i enheden m (meter), så kan man sørge for at konstanten k regnes i enheden $\mathrm{m}^{-1} = 1/\mathrm{m}$, hvorved hele eksponenten, altså $k \cdot x$, er *dimensionsløs*, altså uden enheder! Forbindelsen mellem de to former for en eksponentiel funktion ses af følgende:

(22) $$b \cdot e^{k \cdot x} \;=\; b \cdot (e^k)^x \;=\; b \cdot a^x$$

hvor potensregel (P3) er brugt, og hvor vi har sat $a = e^k$. Vi har altså

(23) $$a = e^k \quad \Leftrightarrow \quad \ln(a) = k$$

idet vi har taget den naturlige logaritmefunktion på begge sider af lighedstegnet.

Eksempel 24

Vi ønsker at skrive den eksponentielle funktion $f(x) = 6 \cdot 1{,}47^x$ på formen $f(x) = b \cdot e^{k \cdot x}$.

Løsning: Ifølge (23) fås:

$$k = \ln(a) = \ln(1{,}47) = 0{,}3853\,.$$

Altså er $f(x) = 6 \cdot e^{0{,}3853 \cdot x}$.

□

Eksempel 25

Omskriv $f(x) = 23 \cdot e^{0,194x}$ på formen $f(x) = b \cdot a^x$.

Løsning: $f(x) = 23 \cdot e^{0,194x} = 23 \cdot (e^{0,194})^x \;=\; 23 \cdot 1,2141^x$.

□

Spørgsmålet er, hvordan formlerne for fordoblings- og halveringskonstanterne kommer til at se ud for eksponentielle funktioner på formen (21)? For at svare på dette, bemærker vi for det første, at vi i formlerne (15) og (18) lige så godt kunne have anvendt den naturlige logaritmefunktion. Den naturlige logaritmefunktion adlyder nemlig nøjagtigt de samme regler som titalslogaritmen gør. En inspektion af de tidligere beviser vil overbevise om det. Vi overlader det til læseren.

For det første ser vi af formlerne i (23), at

(24) $\qquad f \text{ voksende} \;\Leftrightarrow\; a > 1 \;\Leftrightarrow\; k > 0$

(25) $\qquad f \text{ aftagende} \;\Leftrightarrow\; 0 < a < 1 \;\Leftrightarrow\; k < 0$

Sætning 26

For en *voksende* eksponentiel funktion på formen $f(x) = b \cdot e^{k \cdot x}$ (dvs. $k > 0$) kan fordoblingskonstanten bestemmes ved brug af følgende formel:

(26) $$T_2 \;=\; \frac{\ln(2)}{k}$$

For en *aftagende* eksponentiel funktion på formen $f(x) = b \cdot e^{k \cdot x}$ (dvs. $k < 0$) kan halveringskonstanten bestemmes ved brug af følgende formel:

(27) $$T_{0.5} \;=\; \frac{\ln(\frac{1}{2})}{k}$$

Bevis: Vi nøjes med at gennemføre beviset for det voksende tilfælde. Vi benytter formel (15), blot med titalslogaritmen udskiftet med den naturlige logaritme:

$$T_2 \;=\; \frac{\ln(2)}{\ln(a)} \;=\; \frac{\ln(2)}{\ln(e^k)} \;=\; \frac{\ln(2)}{k}$$

□

Bemærkning 27

Hvad angår det *aftagende* tilfælde, så vælger man ofte i modelsammenhæng at skrive funktionen som $f(x) = b \cdot e^{-k \cdot x}$, således, at k bliver positiv. I det tilfælde vil formlen for halveringskonstanten få følgende udseende:

(28) $$T_{0.5} \;=\; \frac{\ln(\frac{1}{2})}{-k} \;=\; \frac{\ln(2^{-1})}{-k} \;=\; \frac{(-1) \cdot \ln(2)}{-k} \;=\; \frac{-\ln(2)}{-k} \;=\; \frac{\ln(2)}{k}$$

□

6. Eksponentielle modeller

I dette afsnit skal vi kigge på nogle situationer, hvor eksponentielle funktioner dukker op i praksis. Udover at besvare forskellige tekniske spørgsmål, skal vi fokusere på de principper, som er afgørende for, hvorfor udviklingerne bliver eksponentielle. Hvad angår sidstnævnte, skal man huske, at eksponentielle funktioner er karakteriseret ved, at den samme x-tilvækst betyder den samme *procentvise* y-tilvækst! Uden ordet "procentvis" ville der jo blot have været tale om en velkendt lineær sammenhæng …

Eksempel 28 (Vækst af bakteriekultur)

Når man skal beskrive en bakteriekulturs vækst, så inddeler man normalt i fire faser: *Nølefasen*, den *eksponentielle fase*, den *stationære fase* og *dødsfasen*. Nølefasen er karakteriseret ved, at cellerne først skal indstille sig på at kunne begynde at vokse. Hvis de er gået i dvale, kan det være, at der først skal fjernes nogle proteiner, før væksten kan begynde. Cellen skal også begynde at lave cellevægsmateriale etc. I den eksponentielle fase er cellen rede til at vokse, og det kan ske uden videre hindringer. Lad os forestille os, at udviklingen i antal bakterier har udviklet sig som angivet i tabellen nedenfor.

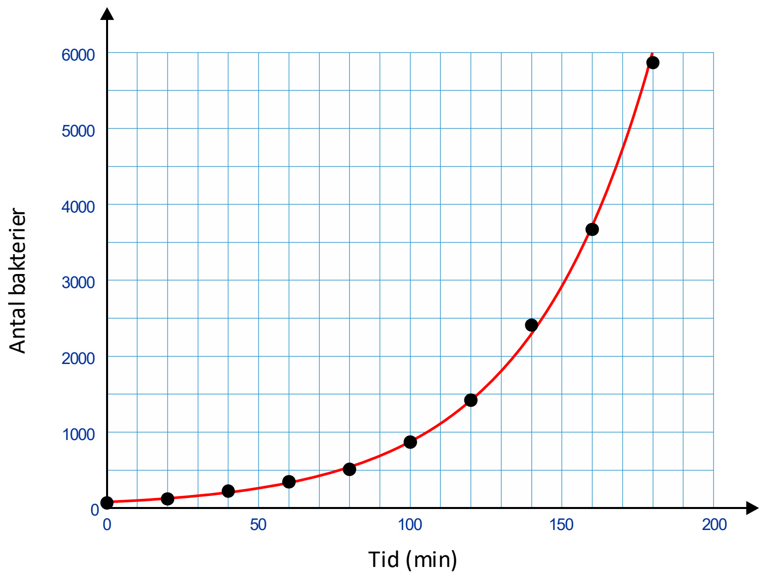
t (min)	0	20	40	60	80
Antal	77	121	223	347	510

t (min)	100	120	140	160	180
Antal	869	1421	2410	3670	5866

a) Vis at udviklingen virkeligt er eksponentiel ved at foretage eksponentiel regression.
b) Hvor mange bakterier vil der være tilstede efter 4 timer, hvis udviklingen altså fortsætter en time mere?
c) Hvornår var populationen oppe på 3000 bakterier?
d) Hvor stor er fordoblingstiden i den eksponentielle fase?
e) Hvor mange procent vokser bakteriekulturen med hvert minut?
f) Hvor mange procent vokser bakteriekulturen med for hver 10 minutter?

Løsninger:

a) Når man udfører eksponentiel regression på sit CAS-værktøj på de foreliggende data, vil man få noget i retningen af følgende:



med forklaringsgrad $R^2 = 0{,}9991$. Denne værdi samt især en visuel inspektion af grafen i forhold til data godtgør, at vi med rimelighed kan sige god for, at bakteriekulturen udvikler sig eksponentiel.

b) Forskriften leveret ved regressionen er $f(x) = 78{,}529 \cdot 1{,}0244^x$. Hvis vi bruger forskriften til at give en prognose på bakteriekulturen efter 4 timer, får vi:

$$f(240) \;=\; 25557{,}21$$

Efter 4 timer eller 240 minutter vil der ifølge modellen være ca. 25600 bakterier.

c) Vi løser ligningen $f(x) = 3000$ med en *solve*-kommando og får:

$$f(x) = 3000 \quad \Leftrightarrow \quad x = 151{,}12$$

Modellen giver altså, at populationen vil have nået en størrelse på 3000 bakterier efter ca. 151 minutter.

d) Fordoblingstiden få2 ved at anvende formel (15) i sætning 19:

$$T_2 \;=\; \frac{\log(2)}{\log(a)} \;=\; \frac{\log(2)}{\log(1{,}0244)} \;=\; 28{,}75$$

Antallet af bakterier vil altså fordobles hver gang, der går knap 29 minutter.

e) Her skal vi have fat i vækstraten: $r = a - 1 = 1{,}0244 - 1 = 0{,}0244 = 2{,}44\%$.
Hvert minut vokser bakteriekulturen altså med ca. 2,4%.

f) Vi udregner først fremskrivningsfaktoren for 10 minutter, trækker 1 fra og omregner til procent (se evt. eksempel 8):

$$r_{\Delta x} \;=\; a^{\Delta x} - 1 \;=\; 1{,}0244^{10} - 1 \;=\; 0{,}2726 \;=\; 0{,}2726 \cdot 100\% \;=\; 27{,}26\%$$

Altså vil antallet af bakterier vokse med ca. 27.3%, hver gang der går 10 minutter.

□

Bemærkning 29 (Populationers udvikling overordnet)

Hvorfor er den eksponentielle udvikling så god til at beskrive *populationers udvikling* over tid? Det afgørende princip her er det, der fremgår af sætning 12. Hver gang, der går et bestemt tidsrum, vil populationen vokse med den samme procent! Det er ret logisk: Hvis en population er dobbelt så stor, er det også naturligt, at tilvæksten i populationen er dobbelt så stor. Dobbelt så mange individer vil også få dobbelt så mange børn/unger. Denne eksponentielle udvikling oplever man også undertiden for befolkningen i en by. Det er dog som oftest ikke så overbevisende, som tilfældet er med bakterier og lignende. Menneskets hensigter er mere komplekse: En ændret politik i en by kan øge eller mindske befolkningstilvæksten. Måske opstår der krig, hungersnød etc.

Tilbage til bakterieudviklingen i eksempel 28: Som nævnt i starten af opgaven er der i virkeligheden flere faser ved udviklingen af en bakteriekultur. Udviklingen kan ikke fortsætte med at vokse *eksponentielt*. På et tidspunkt kommer der til at mangle føde eller næringsstoffer, når bakteriekulturen har nået en vis størrelse. På dette tidspunkt vil udviklingen blive hæmmet og gå langsommere, ja ligefrem stagnere eller dale – heraf den *stationære fase* og *dødsfasen*. Man har også en matematisk model, som kan beskrive den stationære fase, nemlig den såkaldte *logistiske vækst*. Ikke mere om det her.

□

Eksempel 30 (To populationers udvikling)

Population A starter med 2500 individer og vokser med 3,2% pr. år, mens population B starter med 4000 individer og vokser med 1,2% pr. år.

a) Hvor lang tid tager det, før population A passerer population B i antal?
b) Lav en graf over populationernes tidsmæssige forløb.

Løsning: a) Vi kan straks opskrive funktioner for udviklingerne af de to populationer, idet den uafhængige variabel t repræsenterer tiden regnet i år efter start. Den afhængige variabel skal repræsentere antal individer i populationen. Funktionerne $f_A(t)$ og $f_B(t)$ repræsenterer de to populationers størrelser. Vi ved ifølge (8), at fremskrivningsfaktoren er givet ved formlen $a = 1 + r$, mens b klart er populationens størrelse fra start.

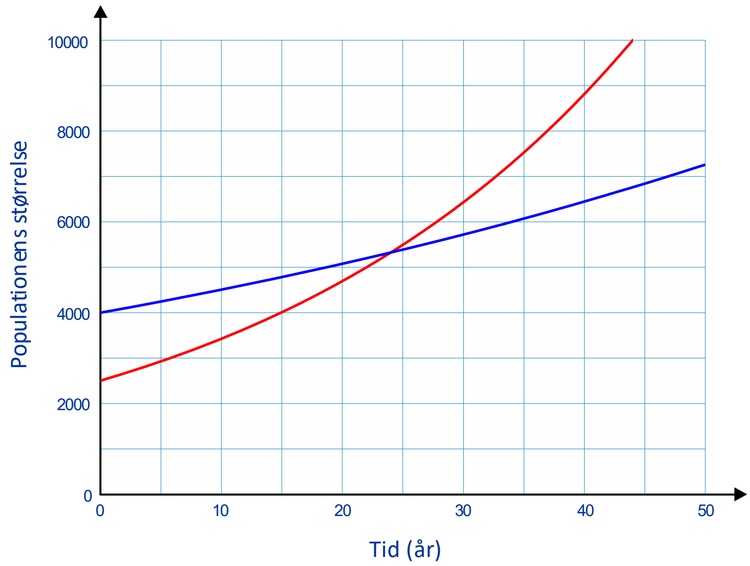
$$f_A(t) \;=\; b \cdot (1+r)^t \;=\; 2500 \cdot (1+0{,}032)^t \;=\; 2500 \cdot 1{,}032^t$$
$$f_B(t) \;=\; b \cdot (1+r)^t \;=\; 4000 \cdot (1+0{,}012)^t \;=\; 4000 \cdot 1{,}012^t$$

Det er indlysende, at population A vokser kraftigst, da fremskrivningsfaktoren her er størst. Da population B imidlertid er størst fra start, tager det lidt tid, før population A overhaler population B i størrelse. For at finde ud af, hvornår populationerne er lige store løser vi naturligvis en ligning:

$$f_A(t) = f_B(t) \quad \Leftrightarrow \quad t = 24{,}016$$

Først defineres de to funktioner i CAS-værktøjet, hvorefter ligningen løses med en kommando noget i retningen af følgende: $solve(f_A(t) = f_B(t), t)$. Vi konkluderer, at population A overhaler population B i størrelse efter godt 24 år.

b) Man laver et plot i sit CAS-værktøj, idet man vælger et passende vindue:



□

Bemærkning 31

For fuldstændighedens skyld skal det også vises, hvordan man kan løse Eksempel 30 a) uden brug af *solve*-kommandoen.

$$f_A(t) = f_B(t) \;\Leftrightarrow\; 2500 \cdot 1{,}032^t = 4000 \cdot 1{,}012^t \;\Leftrightarrow\; \frac{1{,}032^t}{1{,}021^t} = \frac{4000}{2500} \;\Leftrightarrow\; \left(\frac{1{,}032}{1{,}021}\right)^t = 1{,}6$$

$$\Leftrightarrow\; 1{,}019762846^t = 1{,}6 \;\Leftrightarrow\; \log(1{,}019762846^t) = \log(1{,}6)$$

$$\Leftrightarrow\; t \cdot \log(1{,}019762846) = \log(1{,}6) \;\Leftrightarrow\; t = \frac{\log(1{,}6)}{\log(1{,}019762846)} \;=\; 24{,}106$$

hvor blandt andet potensregel (P5) og logaritmeregel (L3) er benyttet.

□

Der findes en hel del eksempler på modeller fra den virkelige verden, hvor *aftagende* eksponentielle funktioner kommer i spil. I fysik er der flere eksempler. *Radioaktivt henfald* er det mest kendte. Andre er modeller i kemi, biologi og naturgeografi.

Eksempel 32 (Et lægemiddels nedbrydning i blodet)

Koncentrationen af et lægemiddel oplyses at aftage eksponentielt med tiden i blodet. Vi antager, at lægemidlet indtages intravenøst – altså direkte i blodbanen – hvorved lægemidlet næsten øjeblikkeligt opnår sin maksimale koncentration. Den eksponentielle model er:

(29) $$C(t) = C_0 \cdot e^{-k \cdot t}$$

hvor $C(t)$ repræsenterer koncentrationen af lægemidlet til tiden t, C_0 er koncentrationen umiddelbart efter injektionen, t er tiden regnet i timer og k er *henfaldskonstanten*. Sidstnævnte har at gøre med, hvor hurtigt koncentrationen af lægemidlet aftager i blodet.

Det oplyses, at lægemidlets koncentration umiddelbart efter injektion er 1,3 mg/ml og at halveringstiden for lægemidlet er 3,5 timer.

a) Bestem henfaldskonstanten k i forskriften (29).
b) Hvad er koncentrationen af lægemidlet efter 2 timer?
c) Hvornår er koncentrationen af læsemidler nede på 0,10 mg/ml?
d) Hvor mange procent aftager lægemidlets koncentration med hver time?

Løsning: De variable er:

t : Tiden i timer
C : Koncentrationen af lægemidlet i blodet i enheden mg/ml.

Vi ser straks, at $C_0 = 1{,}30$.

a) En god måde at besvare dette spørgsmål på, er ved at bemærke, at hvis man går 3,5 timer fremad i tid fra $t = 0$ til $t = 3{,}5$, så halveres koncentrationen fra 1,30 mg/ml til 0,65 mg/ml. Efter af have defineret funktionen (med den ubekendte k) i sit CAS-værktøj, skal man derfor blot med en *solve*-kommando løse ligningen $C(3{,}5) = \frac{1}{2} C_0$:

$$C(3{,}5) = \tfrac{1}{2} C_0 \quad \Leftrightarrow \quad k = 0{,}1980420516$$

b) Dermed haves nu: $C(t) = 1.30 \cdot e^{-0{,}1980420516 \cdot t}$. Via CAS-værktøjet fås herefter:

$$C(2) = 0{,}8748351252$$

Koncentrationen af lægemidlet er altså nede på 0,87 mg/ml efter 2 timer.

c) Ved hjælp af CAS-værktøjet løses en ligning:

$$C(t) = 0{,}10 \quad \Leftrightarrow \quad t = 12{,}95153901$$

Der går altså 13,0 timer, før koncentrationen er nede på 0,10 mg/ml.

d) Vi har brug for fremskrivningsfaktoren a :

$$a = e^{-k} = e^{-0{,}980420516} = 0{,}8203353560$$

hvorefter

$$r = a - 1 = 0{,}8203353560 - 1 = -0{,}1797$$

Koncentrationen aftager altså med 18,0% for hver time, der går.

NB! En alternativ måde at bestemme henfaldskonstanten k på i spørgsmål a) er ved at anvende formel (28): $T_{0.5} = \ln(2)/k$. Man skal altså løse en ligning:

$$\frac{\ln(2)}{k} = 3{,}5 \quad \Leftrightarrow \quad k = 0{,}1980420516$$

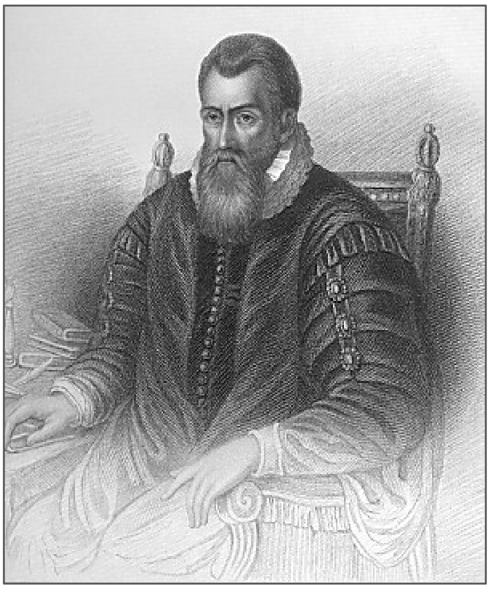
□

Bemærkning 33

En del stoffers koncentration aftager eksponentielt, når det først er ovre i blodet, men det gælder ikke for alle stoffer. For eksempel er det velkendt, at alkohol aftager mere *lineært*. En grov tommelfingerregel er således, at man forbrænder 1 genstand for hver 1,5 time, der går. Det afhænger dog en del af personens vægt, og om det er en mand eller en kvinde.

□

Appendiks A. Lidt om logaritmernes historie



I begyndelsen af 1600-tallet blev de første logaritmer "opdaget" af den skotske matematiker *John Napier* (1550-1617), som er afbildet på billedet til højre. Han var baron på slottet *Merchiston* i nærheden af Edinburgh. Senere bidrog englænderen *Henry Briggs* (1561-1631) til indførelsen af de nuværende *titalslogaritmer*. Siden den tid fik logaritmerne en kolossal betydning som hjælpemiddel til at lette arbejdet ved numeriske beregninger – både i astronomien og i navigationen. Fælles for de to discipliner er, at de er meget beregningstunge. Da man på den tid ikke havde lommeregnere eller edb-maskiner til rådighed, var det af stor betydning, at man kunne lette beregningsarbejdet. Logaritmerne er, som vi skal se nedenfor, velegnede i forbindelse med udførelse af *multiplikationer, divisioner*, *roduddragninger* og *potensopløftninger*, der jo normalt tager lang tid at udføre i hånden. Faktisk blev logaritmetabeller anvendt lige indtil 1970'erne, hvor lommeregnerne vandt indpas. I mere end 300 år var logaritmerne således af fundamental betydning for folk, som skulle udføre store beregninger: Astronomer, ingeniører, videnskabsfolk, navigatører etc. ...

Før vi kigger på et eksempel, vil det være en fordel, hvis læseren fremskaffer en gammel logaritmetabel, gerne fircifrede tabeller fra *Erlang C*. Alternativt må man "bruge lommeregneren som logaritmetabel". Når vi skal gange to tal sammen, kan vi bruge logaritmeregel (L1) fra sætning 15:

$$\log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b)$$

Lad os sige, at vi skal gange 2,349 med 83,37. Logaritmeregel (L1) giver da:

$$\begin{aligned} \log(2{,}349 \cdot 83{,}37) &= \log(2{,}349) + \log(83{,}37) \\ &= 0{,}3709 + 1{,}9210 \\ &= 2{,}2919 \end{aligned} \tag{A1}$$

Nu ved vi altså hvad $\log(2{,}349 \cdot 83{,}37)$ er lig med. For at finde det ønskede produkt udnytter vi sammenhængen (12) fra tidligere, dvs. at funktionen 10^x ophæver virkningen af logaritmen. Altså fås: $2{,}349 \cdot 83{,}37 \;=\; 10^{2{,}2919} = 195{,}8$.

Idéen bag multiplikation ved hjælp af logaritmer

Idéen bag ovenstående metode er, at man først finder logaritmen til hver af de to involverede tal, som indgår i multiplikationen. Derefter lægges de to logaritmeværdier sammen, og resultatet bestemmer man *antilogaritmen* til. Dermed haves det ønskede produkt.

I stedet for at gange de to tal sammen i hånden, kan man altså udføre to tabelopslag i en logaritmetabel, foretage en addition samt et opslag i en antilogaritmetabel. Nævnte metode kan umiddelbart virke mere besværlig end at udføre multiplikationen i hånden. Her må man være opmærksom på, at man ved håndmetoden nemmere kommer til at begå regnefejl (overvej!). Besparelsen vil desuden være større jo flere cifre, der er i tallene. Ved multiplikation af for eksempel tre eller flere tal vil der være en yderligere besparelse, og ved roduddragning og potensopløftning en kæmpe besparelse. Se opgaver i opgave-sektionen.

Kommentarer i forbindelse med brug af logaritmetabel

De fleste logaritmetabeller kan kun anvendes *direkte* i intervallet $[1,10[$, og de fleste antilogaritmetabeller (10^x) kun i intervallet $[0,1[$. Heldigvis kan man også bestemme logaritmen og antilogaritmen til tal, der ligger udenfor de pågældende intervaller. Man foretager blot nogle få "korrektioner", som det fremgår af følgende eksempler:

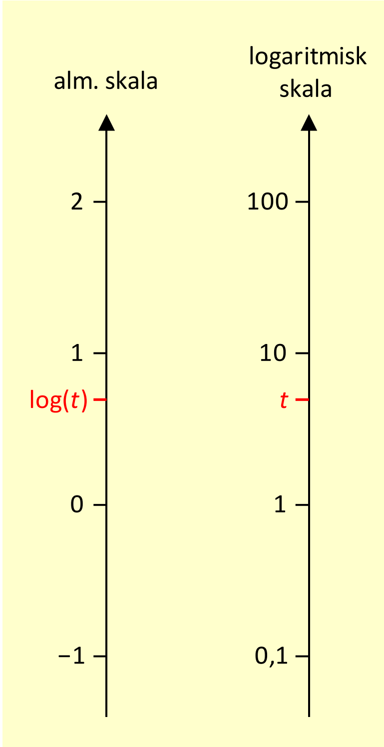
$$\log(83{,}37) = \log(10 \cdot 8{,}337) = \log(10) + \log(8{,}337) = 1 + \log(8{,}337)$$
$$10^{2{,}2919} = 10^2 \cdot 10^{0{,}2919} = 100 \cdot 10^{0{,}2919}$$
$$10^{-1{,}6316} = 10^{-2+2-1{,}6316} = 10^{-2} \cdot 10^{2-1{,}6316} = 0{,}01 \cdot 10^{0{,}3684}$$

Disse korrektioner foretages i praksis i hovedet.

□

Bemærk, at datidens videnskabsmænd var gode til hovedregning, og den store øvelse de fik med brug af logaritmetabeller, betød at processen blev speedet op.

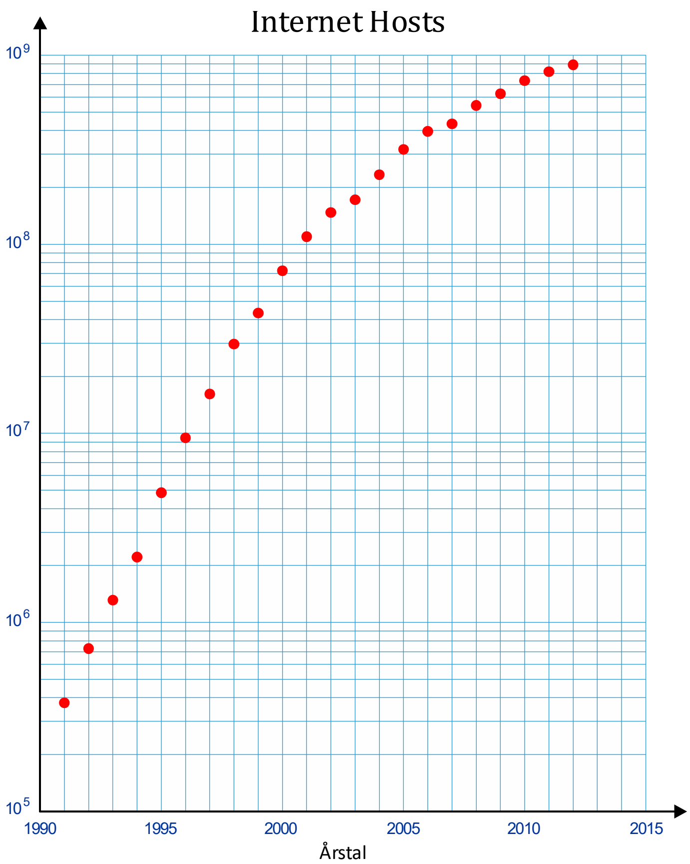
Appendiks B. Logaritmisk skala



Når man afbilder data på en skala, så anvendes som oftest det, vi vil kalde en *almindelig skala*. Den er karakteriseret ved, at den har *ækvidistant* inddeling, hvorved menes at tal, som har samme indbyrdes forskel, bliver afbildet med samme indbyrdes afstand. Undertiden er det dog hensigtsmæssig at foretage en anden inddeling end den almindelige.

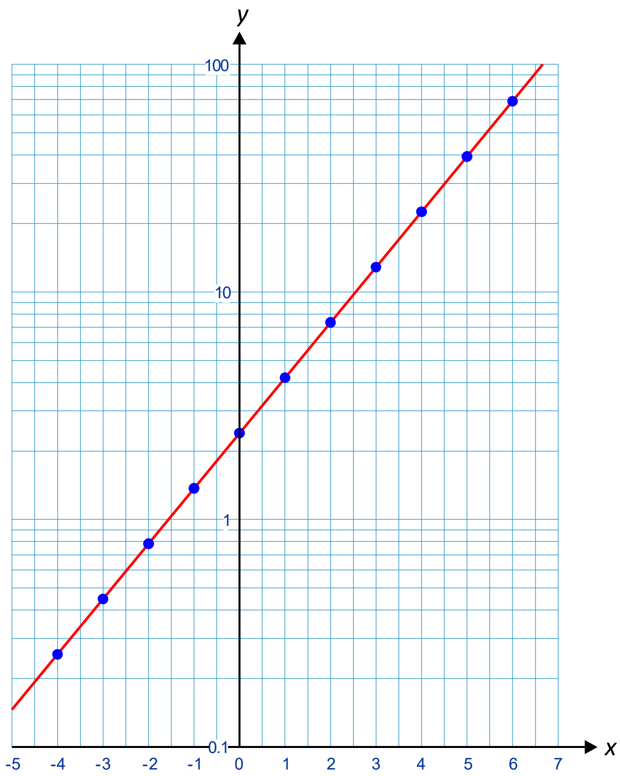
Den vel mest kendte anderledes skala er den *logaritmiske*, som er vist på figuren til højre. På den logaritmiske skala er et tal t afbildet ud for $\log(t)$ på den almindelige skala. Således afbildes 100 ud for 2, 10 ud for 1, 1 ud for 0. 0,1 ud for –1, etc.

En logaritmisk skala kan være hensigtsmæssig, når data klumper meget sammen, når de afbildes på en almindelig skala – for eksempel hvis tallene er meget forskellige i størrelse, så der både er meget små og meget store tal. Et godt eksempel er hvis man ønsker at afbilde den tidsmæssige udvikling af antallet af computerservere, som indgår i det globale Internet. Ifølge data fra *Internet Systems Corsortium* var der i perioden 1991 til 2012 en voldsom udvikling i antallet af servere. Antallet voksede med mere end en faktor 1000 i perioden. Figuren til venstre viser antal servere for hvert år (januar-tal). Den logaritmiske 2. akse viser tallene spredt pænt ud over 4 dekader. For hver *dekade* vokser antallet med en faktor 10. Der er tale om et såkaldt *enkeltlogaritmisk* koordinatsystem, idet førsteaksen har en almindelig skala, mens andenaksen er logaritmisk.



Gitterlinjer i dekaderne hjælper med til at lette aflæsninger. I nederste dekade er der således gitterlinjer for $1\cdot 10^5$, $2\cdot 10^5$, $3\cdot 10^5$ osv. op til $10\cdot 10^5 = 10^6$.

Faktisk gælder der, at en funktion er eksponentiel *hvis og kun hvis* grafen er en ret linje i et enkeltlogaritmisk koordinatsystem. Denne smukke egenskab udnyttede man tidligere i forbindelse med eksponentiel regression. Nedenfor ses grafen for den eksponentielle funktion $f(x) = 2{,}4 \cdot 1{,}75^x$ tegnet i et enkeltlogaritmisk koordinatsystem.



At ovenstående påstand om eksponentielle funktioner og enkeltlogaritmisk koordinatsystem er rigtig fremgår af følgende:

Sætning B1

f er en eksponentiel funktion $\Leftrightarrow$ $\log(y)$ er en lineær funktion af x

Bevis: Vi beviser først $\Rightarrow$: Antag $f(x) = b \cdot a^x$. Hvis vi tager titalslogaritmen på begge sider, fås $\log(y) = \log(b \cdot a^x) = \log(b) + \log(a^x) = \log(b) + x \cdot \log(a)$, hvor vi har brugt logaritmereglerne (L1) og (L3). Vi ser direkte, at $\log(y)$ er en lineær funktion af x, da både $\log(a)$ og $\log(b)$ er konstanter. Dernæst beviser vi den anden vej $\Leftarrow$: Vi antager, at $\log(y)$ er en lineær funktion af x, dvs. $\log(y) = c \cdot x + d$ for konstanter c og d. Vi anvender antilogaritmen på begge sider og får

(B1) $$10^{\log(y)} = 10^{c \cdot x + d} \quad \Leftrightarrow \quad y = 10^{c \cdot x} \cdot 10^d \quad \Leftrightarrow \quad y = 10^d \cdot (10^c)^x$$

hvor vi har benyttet potensreglerne (P1) og (P3). Vi ser, at vi på højre side har en eksponentiel funktion med $b = 10^d$ og $a = 10^c$.

□

Opgaver

1. Potenser og Potensregler & 2. Eksponentielle funktioner

Opgave 1

Benyt potensreglerne side 3 til at reducere nedenstående udtryk. Går dig samtidigt klar, hvilke regler du anvender i de enkelte trin i reduktionen. Husk mellemregningger.

a) $a^3 \cdot a^5$ b) $\dfrac{x^{10}}{x^7}$ c) $(a \cdot b)^3$ d) $(a^3)^4 \cdot a$ e) $\dfrac{x^{13} \cdot x^{-2}}{x}$

f) $\dfrac{x^7}{x^{-3}}$ g) $\dfrac{x^a}{x^2}$ h) $(a^{-2})^3 \cdot a^7$ i) $(2 \cdot a \cdot b)^3$ j) $\dfrac{4^x}{2^x}$

k) $\dfrac{a^8 \cdot b^4}{a^5 \cdot b}$ l) $\dfrac{(3x)^2 \cdot y^3}{x^{-2} \cdot y^{-1}}$ m) $a^4 \cdot \dfrac{(a \cdot b)^3}{b^2}$ n) $\left(\dfrac{2a}{b}\right)^2$ o) $(e^k)^x$

Opgave 2

Lad der være givet den eksponentielle funktion $f(x) = 3 \cdot 2^x$. Opskriv følgende

a) $f(s)$ b) $f(t)$ c) $f(x+1)$ d) $f(x+T)$ e) $f(2x)$ f) $f(0)$

Du er velkommen til også at reducere det endelige udtryk, om muligt, men du skal ikke.

Opgave 3

Benyt dit CAS-værktøj til at tegne følgende grafer:

a) Tegn grafen for funktionen $f(x) = 2{,}5 \cdot 1{,}25^x$.
b) Tegn grafen for funktionen $f(x) = 5 \cdot 0{,}85^x$.
c) Tegn graferne for funktionerne $f(x) = 3 \cdot 1{,}22^x$ og $g(x) = 9 \cdot 0{,}75^x$ i samme koordinatsystem, idet du benytter et vindue defineret ved $-5 \le x \le 10,\ 0 \le y \le 20$, altså x fra –5 til 10 og y fra 0 til 20.

Prøv også i mindst et af plottene at sørge for ens *skalering* på akserne, så en enhed, altså 1, fylder lige meget på x-aksen som på y-aksen. Så får man et bedre indtryk af, hvor hurtigt funktionerne vokser.

Opgave 4

Lad $f(x) = 9{,}5 \cdot 1{,}35^x$ og $g(x) = 2x + 15$.

a) Løs ligningen $f(x) = g(x)$ med en *solve* kommando.
b) Tegn dernæst graferne for de to funktioner i samme koordinatsystem i et passende vindue i dit CAS-værktøj, så man også grafisk kan aflæse de to løsninger. Stemmer disse med de beregnede løsninger?
c) Løs desuden ligningen $f(x) = 30$ med *solve*-kommandoen og se, om det stemmer med den aflæsning, du kan foretage på grafen under b).

Opgave 5

I tabellen er to funktionsværdier for en eksponentiel funktion $f(x) = b \cdot a^x$ angivet.

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$			3	3,6			

a) Hvad er a og b? *Hjælp*: Husk egenskaberne i sætning 1.

b) Bestem de resterende funktionsværdier.

Opgave 6

I tabellen er to funktionsværdier for en eksponentiel funktion $f(x) = b \cdot a^x$ angivet.

x	-1	0	1	2	3	4	7
$f(x)$					50	500	

a) Hvad er a og b? *Hjælp*: Husk egenskaberne i sætning 1.

b) Bestem de resterende funktionsværdier.

Opgave 7 (Fremskrivningsfaktorer)

Lad $f(x) = 3{,}8 \cdot 1{,}12^x$.

a) Hvor meget fremskrives (ganges) y med, når x vokser med 1?

b) Hvor meget fremskrives (ganges) y med, når x vokser med 3?

c) Hvor meget fremskrives (ganges) y med, når x *aftager* med 1?

Opgave 8 (Fremskrivningsfaktorer)

Lad $f(x) = 16 \cdot 0{,}36^x$.

a) Hvor meget fremskrives y med, når x vokser med 1?

b) Hvor meget fremskrives y med, når x vokser med 3?

Opgave 9 (Teknik i CAS-værktøj)

I det følgende skal finde du finde ud af, hvordan man i det CAS-værktøj, du bruger, kan få udregnet mange funktionsværdier på en gang. Lad $f(x) = 4 \cdot 1{,}5^x$.

a) Givet listen $[-2,1,6,7,13]$ med fem x-værdier. Beregn en liste med funktionsværdierne for hver af de fem tal på én gang.

b) Bestem funktionsværdierne for alle tallene fra –5 til 10 i skridt på 0,5. Igen skal det klares på én gang!

Opgave 10

Nedenfor er givet to punkter på grafen for en eksponentiel funktion $f(x) = b \cdot a^x$. Bestem i hvert tilfælde *a* og *b* ved hjælp af formlerne i sætning 13.

a) $(1,5)$ og $(3,8)$ b) $(4,20)$ og $(10,5)$ c) $(-5,6)$ og $(4,40)$

d) $(-7,100)$ og $(2,23)$ e) $(3{,}5\,;18{,}4)$ og $(6{,}9\,;31{,}7)$ f) $(11{,}1\,;0{,}4)$ og $(18{,}1\,;5{,}1)$

NB! Ifølge almindelig dansk notation er her benyttet komma i decimaltal og derfor semikolon til at adskille tallene. I et CAS-værktøj bruges almindeligvis punktum i decimaltal og komma til at adskille tallene!

Opgave 11

En eksponentiel funktion har fremskrivningsfaktoren 1,18, og grafen for funktionen passerer igennem punktet $(5,3)$. Bestem forskriften for funktionen.

Opgave 12

En eksponentiel funktion $f(x) = b \cdot a^x$ opfylder $f(-3) = 0{,}04$ og $f(12) = 9600$. Bestem værdierne for *a* og *b*. *Hjælp*: Bemærk, at der blot er tale om to punkter på grafen …

Opgave 13

En eksponentiel funktion $f(x) = b \cdot a^x$ har fremskrivningsfaktoren 0,87 og opfylder, at $f(3) = 200$. Bestem forskriften for funktionen.

Opgave 14

Nedenfor er givet to punkter på grafen for en eksponentiel funktion $f(x) = b \cdot a^x$. Bestem i hvert tilfælde *a* og *b*.

a) $(7,8)$ og $(12,2)$ b) $(-10,14)$ og $(6,3000)$ c) $(2{,}3\,;18{,}2)$ og $(8{,}5\,;28{,}9)$

Opgave 15

En eksponentiel funktion er givet ved $f(x) = 420 \cdot 1{,}062^x$.

a) Hvor meget vokser *y* med i procent, når *x* vokser med 1?

b) Hvor meget vokser *y* med i procent, når *x* vokser med 5?

Opgave 16

En eksponentiel funktion er givet ved $f(x) = 610 \cdot 0{,}82^x$.

a) Hvor meget aftager *y* med i procent, når *x* vokser med 1?

Opgave 17

I første søjle nedenfor er en fremskrivningsfaktor med tilhørende vækstrate i både kommatal og procent angivet. Udfyld de tomme felter i skemaet. Husk i den forbindelse definition 4: $r = a - 1 \;\Leftrightarrow\; a = 1 + r$.

Fremskrivningsfaktor *a*	1,07	1,34		0,87		3,5
Vækstrate *r* i kommatal	0,07		0,22			
Vækstrate *r* i procent	7%				120%	

Opgave 18

Udfyld de tomme felter i skemaet (Husk definition 4).

Fremskrivningsfaktor *a*	67	0,02				
Vækstrate *r* i kommatal				−0,14	10	
Vækstrate *r* i procent			30%			−0,7%

Opgave 19

Angiv vækstraten *r i procent* for hver af nedenstående eksponentielle funktioner.

a) $f(x) = 2 \cdot 1{,}17^x$ b) $f(x) = 30 \cdot 1{,}67^x$ c) $f(x) = 4 \cdot 1{,}004^x$ d) $f(x) = 20 \cdot 0{,}70^x$

e) $f(x) = 2 \cdot 0{,}03^x$ f) $f(x) = 5 \cdot 3{,}5^x$ g) $f(x) = 230 \cdot 0{,}1^x$ h) $f(x) = 3 \cdot 10^x$

Opgave 20

En eksponentiel funktion vokser med 25%, når x øges med 1. Det oplyses, at $f(0) = 63$. Bestem forskriften for f.

Opgave 21

En eksponentiel funktion vokser med 34%, når x øges med 2. Det oplyses, at $f(0) = 5$. Bestem forskriften for f. *Hjælp*: Brug sætning 1c) til at bestemme a.

Opgave 22

Lad $f(x) = 41 \cdot 1{,}27^x$. Hvor meget vokser y med i procent, når x vokser med 2?

Opgave 23

Lad $f(x) = 6 \cdot 0{,}85^x$. Hvor meget aftager y med i procent, når x vokser med 3?

Opgave 24 (Renteformlen)

Olaf skyder en kapital på 5000 kr. ind i en virksomhed. Hvert år de næste 8 år vokser værdien af hans indskud med 20%. Hvor meget er hans investering værd efter de 8 år?

Opgave 25 (Procentvis vækst)

En befolkning vokser over en periode på 7 år fra 23000 til 51000.

a) Hvor mange procent er befolkningen vokset med over alle 7 år?
b) Hvor mange procent er befolkningen *gennemsnitligt* vokset med pr. år?

Hjælp: Til a): Benyt formlen (7). b): Benyt evt. renteformlen i eksempel 11.

Opgave 26 (Renter i forskellige perioder)

Når man skal omsætte procentvise vækster eller renter fra 1 periode til n perioder eller den modsatte vej, så er det hensigtsmæssigt at tænke i fremskrivningsfaktorer. For at skelne mellem de forskellige perioder, vil vi i det følgende betegne fremskrivningsfaktoren for 1 periode og n perioder med henholdsvis a_1 og a_n samt de tilhørende vækstrater med henholdsvis r_1 og r_n. Hver gang man går én periode frem, *fremskriver* (ganger) man med faktoren $a_1 = 1 + r_1$, jf. (7). Er man gået n perioder fremad, har man altså i alt ganget med $a_1^n = (1+r_1)^n$. Dermed haves $a_n = a_1^n$ og da $a_n = 1 + r_n$ pr. definition, har vi:

$$a_n = a_1^n \quad \Leftrightarrow \quad 1 + r_n = (1+r_1)^n$$

Benyt formlerne til at besvare følgende spørgsmål:

a) Hvad svarer en månedlig rente på 1,75% til i årlig rente?
b) Hvad svarer en årlig rente på 30% til i månedlig rente?
c) Omregn en halvårlig rente på 12,5% til en årlig rente.
d) Omregn en samlet procentvis vækst på 47% over en periode på 8 år til en (gennemsnitlig) årlig procentvis vækst.
e) Kursen af en aktie er hvert år i 4 år vokset med 15%. Hvor meget er kursen vokset med over alle 4 år?

Man kan eventuelt benytte *solve*-kommandoen i sit CAS-værktøj, efter man har defineret de kendte størrelser.

Opgave 27

Lad $f(x) = 31{,}8 \cdot 0{,}86^x$.

a) Hvor mange procent aftager funktionen med, når x vokser med 1?
b) Hvor mange procent aftager funktionen med, når x vokser med 5?

Opgave 28

En bakteriekultur starter med 600 bakterier og vokser eksponentielt til den efter 14 timer er oppe på 520000 bakterier. Hvor stor er vækstraten pr. time?

Hjælp: Der er flere måder at løse opgaven på, fx renteformlen (se eksempel 11) eller man kan udnytte oplysningerne til at identificere to punkter på grafen …

Opgave 29

Grafen for en eksponentiel funktion $f(x) = b \cdot a^x$ indeholder to punkter. Bestem a og b manuelt, altså uden brug af sætning 13. *Hjælp*: Indsæt oplysningerne i forskriften. Det giver to ligninger med to ubekendte. Løs dem.

a) $(1,6)$ og $(4,48)$ b) $(2,90)$ og $(3,270)$

Opgave 30

Givet to eksponentielle funktioner $f(x) = 400 \cdot 1{,}18^x$ og $g(x) = 50 \cdot 1{,}32^x$. Benyt et CAS-værktøj til at udføre følgende:

a) Løs ligningen $f(x) = g(x)$.
b) Tegn grafen for f og g i samme koordinatsystem, idet du finder et passende vindue at tegne graferne i, så du kan se skæringspunktet mellem dem. Får du samme svar ved at aflæse løsningerne til ligningen?

Opgave 31

En eksponentiel funktion $f(x) = b \cdot a^x$ opfylder, at $f(2) = 7$. Desuden oplyses det, at y vokser med 34%, når x vokser med 5. Bestem a og b i forskriften.

Hjælp: Benyt oplysningerne til at bestemme to punkter på grafen, hvorefter sætning 13 eller eksponentiel regression kan benyttes.

Opgave 32

En population vokser eksponentielt i en årrække. Tre år efter start er populationens størrelse på 6800. I løbet af de næste 5 år vokser populationen med 48%. Bestem en forskrift for populationsstørrelsen som funktion af antal år efter start.

Hjælp: Benyt oplysningerne til at bestemme to punkter på grafen …

Opgave 33

En eksponentiel funktion $f(x) = b \cdot a^x$ opfylder, at $f(-5) = 200$. Desuden oplyses det, at y aftager med 37%, når x vokser med 4. Bestem a og b i forskriften.

3. Titalslogaritmen

Opgave 34

Løs følgende ligninger *uden* brug af *solve*-kommandoer, dvs. benyt kun funktioner, som er på en simpel lommeregner samt reglerne (11) og (12).

a) $\log(x)=2$ b) $\log(x)=1{,}94$ c) $\log(x+5)=1$ d) $2\cdot\log(x-1)+1=4$

Opgave 35

Løs nedenstående ligninger *uden* brug af *solve*-kommandoer, dvs. benyt kun funktioner, som er på en simpel lommeregner samt logaritmereglerne i sætning 15. Se i øvrigt eksempel 16 for hvordan man gør.

a) $2\cdot 1{,}74^x=35$ b) $7{,}2\cdot 1{,}06^x=23$ c) $9\cdot 0{,}85^x=0{,}24$ d) $1{,}53^{x-3}=5$

e) $2^x\cdot 3^x=100$ f) $0{,}70^x=17\cdot 1{,}56^x$ g) $4\cdot 1{,}28^x=10\cdot 1{,}09^x$

I e), f) og g): Benyt evt. potensreglerne (P1) og (P2) først.

Opgave 36 (Jordskælv)

Et jordskælv har styrken 6,7 på Richter-skalen. Se definitionerne i eksempel 17.

a) Hvor meget seismisk energi er udløst ved jordskælvet?
b) Hvor mange gange mere energi udløses ved et jordskælv, som er 1 højere på Richter-skalaen?

Opgave 37 (Jordskælv)

Ved et jordskælv udløses en energi på $9{,}4\cdot 10^{16}$ J. Hvor stærk er Jordskælvet målt i Richter-tal? Se formel (13) i eksempel 17.

Opgave 38 (pH-værdi i kemi)

I kemi har man begrebet *pH-værdi* til at beskrive, om et stof er en syre eller base. Hvis vi har at gøre med en syre, så kan vi abstrakt betegne den med symbolet HA, hvor H er hydrogen og A står for syreresten. Hvis man opløser syren i vand, opstår der en ligevægt, som kan udtrykkes ved reaktionen: $\mathrm{HA} \rightleftarrows \mathrm{H}^+ + \mathrm{A}^-$. For en stærk syre er ligevægten forskudt mod højre, mens den for en svag syre er forskudt mod venstre. Hydrogenion-koncentrationen afgør, hvor stærk en syre, der er tale om. Helt præcis definerer man pH-værdien på følgende måde:

$$\text{pH} = -\log[H^+]$$

hvor $[H^+]$ betegner hydrogenion-koncentrationen målt i mol.

a) Fremstiller man en 0,05 molær opløsning af HCl (saltsyre), vil $[H^+] = 0{,}05$. Bestem opløsningens pH-værdi.
b) Bestem hydrogenion-koncentrationen i en opløsning med en pH-værdi på 3,6.
c) Som bekendt er den *neutrale* pH-værdi lig med 7, som for eksempel i rent vand. Hvor stor er hydrogenion-koncentrationen her?

Opgave 39 (Lydstyrke i fysik)

Et andet område, hvor man benytter logaritmer er ved definitionen af *lydstyrke*, der som bekendt regnes i *decibel*. En af grundene til at definere lydstyrke via en logaritmefunktion er, at øret omtrent opfatter lyd "logaritmisk". Det menneskelige øre kan således skelne forholdsvis små forskelle i lydintensitet i den lave ende af skalaen, mens tilsvarende forskelle i den høje ende ikke vil kunne skelnes. Lydstyrken L defineres ved hjælp af *lydintensiteten* I, som regnes i W/m^2. Den svageste lyd, som det menneskelige øre kan høre, er på $I_0 = 10^{-12}$ W/m^2. Lydstyrken L defineres på følgende måde og regnes i decibel:

$$L = 10 \cdot \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

a) Hvad er den mindste lydstyrke, som det menneskelige øre kan høre? (Sæt $I = I_0$).
b) En lyd har en intensitet på $4 \cdot 10^{-5}$ W/m^2. Hvor stor er lydstyrken?
c) Almindelig tale svarer til 60 dB. Hvor stor er lydintensiteten her?
d) Samme spørgsmål for meget høj musik ved 130 dB?
e) Blandt musikeksperter er det velkendt, at lydstyrken vokser med ca. 3 dB, når effekten og dermed lydintensiteten fordobles. Kan du eftervise dette?

Opgave 40

Isoler y i udtrykket $\log(y) = 3 - 0{,}2 \cdot \log(x)$ ved brug af reglerne (11) og (12) side 13 samt potensreglerne side 5. Vis at det giver $y = 10^3 \cdot x^{-0{,}2}$.

Opgave 41

Man kan vise, at logaritmefunktioner med forskellige grundtal alle er *proportionale*. Det er således logaritmen $\ln(x)$, med grundtal e, og logaritmen $\log(x)$, med grundtal 10, dermed også. Benyt logaritmereglerne for $\ln(x)$ samt (20) til at vise, at der gælder følgende: $\ln(x) = 1/\log(e) \cdot \log(x)$.

4. Fordoblings og halveringskonstanter

Opgave 42

Bestem fordoblingskonstanterne for nedenstående eksponentielle funktioner.

a) $f(x)=5\cdot 1{,}23^x$ b) $f(x)=17{,}3\cdot 1{,}0521^x$ c) $f(x)=50\cdot 2{,}26^x$

d) $f(x)=2{,}1\cdot 1{,}00123^x$ e) $f(x)=9\cdot 3{,}67^x$

Opgave 43

Bestem halveringskonstanterne for nedenstående eksponentielle funktioner.

a) $f(x)=7\cdot 0{,}5^x$ b) $f(x)=34\cdot 0{,}7219^x$ c) $f(x)=5{,}6\cdot 0{,}0391^x$

d) $f(x)=650\cdot 0{,}48^x$ e) $f(x)=44\cdot 0{,}985^x$

Opgave 44

Afgør først om hver af nedenstående eksponentielle funktioner er voksende eller aftagende og udregn derefter den relevante fordoblings/halveringskonstant.

a) $f(x)=1{,}32^x$ b) $f(x)=25\cdot 0{,}0732^x$ c) $f(x)=0{,}054\cdot 4{,}81^x$

d) $f(x)=10^x$ e) $f(x)=87\cdot 0{,}931^x$ f) $f(x)=6\cdot 0{,}66^x$

Opgave 45

Løs nedenstående blandede opgaver. Benyt eventuelt formlerne i sætning 19 eller 21.

a) En eksponentiel funktion har fremskrivningsfaktoren 1,05. Bestem funktionens fordoblingskonstant.
b) En eksponentiel funktion vokser med 33%, når x vokser med 1. Bestem fordoblingskonstanten for funktionen.
c) Grafen for en eksponentiel funktion går igennem punkterne $(4,10)$ og $(11,1)$. Bestem funktionens halveringskonstant.
d) En eksponentiel funktion aftager med 21%, når x vokser med 1. Bestem funktionens halveringskonstant.
e) En eksponentiel funktion vokser med 79%, når x vokser med 10. Bestem funktionens fordoblingskonstant.

Opgave 46

En voksende eksponentiel funktion har fordoblingskonstanten 13,8. Bestem fremskrivningsfaktoren a.

Opgave 47

Bestem fremskrivningsfaktoren for en eksponentiel funktion med halveringskonstant 13.

Opgave 48 (Nyttige formler)

Vi har i hovedteksten set to former at skrive en eksponentiel funktion på. Der er imidlertid et par andre, som er nyttige, når man kender fordoblingskonstanten/halveringskonstanten. I tilfældet med en *voksende* eksponentiel funktion kan vi arbejde videre med formel (17) side 19. Ved at foretage nogle omskrivninger, kan vi få et udtryk for a :

$$a^{T_2} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \left(a^{T_2}\right)^{\frac{1}{T_2}} = 2^{\frac{1}{T_2}} \quad \Leftrightarrow \quad a = 2^{\frac{1}{T_2}}$$

hvor vi i sidste trin har benyttet potensregel (P3). Vi kan nu bruge dette udtryk for a :

$$f(x) = b \cdot a^x = b \cdot \left(2^{\frac{1}{T_2}}\right)^x = b \cdot 2^{\frac{x}{T_2}}$$

hvor vi igen har benyttet potensregel (P3). Vi har dermed:

For f voksende: $\quad a = 2^{\frac{1}{T_2}}$ og $f(x) = b \cdot 2^{\frac{x}{T_2}}$

a) Vis, at hvis f er *aftagende*, med halveringskonstant $T_{0.5}$, så gælder tilsvarende:

For f aftagende: $\quad a = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{T_{0.5}}}$ og $f(x) = b \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{T_{0.5}}}$

b) En aftagende eksponentiel funktion har halveringskonstanten 25,6. Bestem fremskrivningsfaktoren a med 4 decimalers nøjagtighed.

c) Antag at funktionen under b) har $b = 500$. Bestem $f(10)$ og løs $f(x) = 100$.

d) Hvor mange procent aftager y med, når x vokser med 170?

Opgave 49

En aftagende eksponentiel funktion har halveringskonstanten 7,4. Hvor meget skal x vokse med, før y-værdien falder *til* 1/10 af den oprindelige y-værdi?

Hjælp: Du kan evt. bruge en formel fra opgave 48. Bemærk, at værdien af b er ligegyldig!

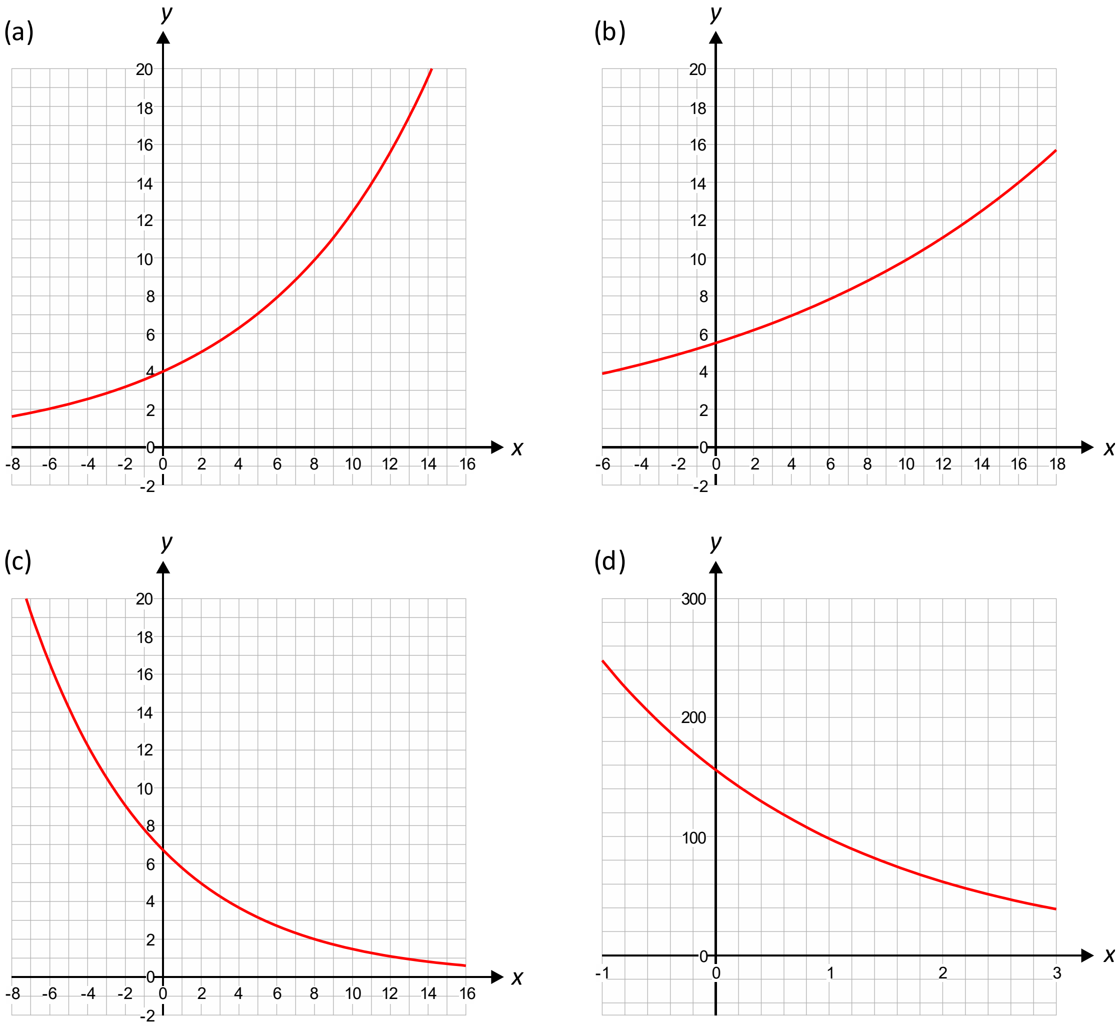
Opgave 50

I en bakteriekultur, der vokser eksponentielt oplyses det, at fordoblingskonstanten er 15 timer. Efter 40 timer er der 50000 bakterier. Hvor mange bakterier var der fra start?

Hjælp: Brug eventuelt en af formlerne fra opgave 48.

Opgave 51

Bestem ved aflæsning fordoblingskonstanterne for de voksende eksponentielle funktioner og halveringskonstanterne for de aftagende eksponentielle funktioner herunder. Husk at markere aflæsningerne!



Opgave 52

Givet de eksponentielle funktioner $f(x) = 30 \cdot 1{,}20^x$ og $g(x) = 18 \cdot 1{,}37^x$.

a) Beregn koordinaterne til skæringspunktet mellem de to grafer.

b) For hvilken x-værdi har g en tre gange så stor funktionsværdi som f?

c) Tegn graferne for de to funktioner i samme koordinatsystem og undersøg, om dine svar fra a) og b) ser rimelige ud.

Opgave 53

Ikke overraskende fordobles y-værdierne for en voksende eksponentiel funktion, når x gives en bestemt tilvækst. y-værdierne vil ligeledes femdobles for bestemte x-tilvækster. Benyt dit CAS-værktøj til at beregne, hvor stor "femdoblingskonstanten" er for følgende funktion: $f(x) = 47 \cdot 1{,}08^x$. *Hjælp*: Tænk på bemærkning 23!

5. Den naturlige eksponential- og logaritmefunktion

Opgave 54

Omskriv nedenstående eksponentielle funktioner på formen $f(x)=b\cdot a^x$ til den alternative form $f(x)=b\cdot e^{k\cdot x}$. *Hjælp*: Se eksempel 24.

a) $f(x)=4\cdot 1{,}25^x$ b) $f(x)=200\cdot 1{,}75^x$ c) $f(x)=31\cdot 0{,}82^x$

Opgave 55

Omskriv nedenstående eksponentielle funktioner på formen $f(x)=b\cdot e^{k\cdot x}$ til den gamle form $f(x)=b\cdot a^x$. *Hjælp*: Se eksempel 25.

a) $f(x)=6\cdot e^{0{,}17x}$ b) $f(x)=0{,}382\cdot e^{-1{,}47x}$ c) $f(x)=10\cdot e^{2x}$

Opgave 56

Tegn graferne for funktionerne e^x og $\ln(x)$ i samme koordinatsystem a la graferne for 10^x og $\log(x)$ på side 14. Afbild graferne i området givet ved $-4\le x\le 12$ og $-4\le y\le 12$ og sørg for ens skalering på akserne. Kan det bekræftes, at den ene graf er en spejling af den anden graf i linjen $y=x$?

Opgave 57

Bestem værdierne $\ln(e), \ln(e^2), \ln(e^3)$ og $\ln(e^{-1})$. *Hjælp*: Se (19) og (20).

Opgave 58

Angiv i hvert af nedenstående tilfælde, om der er tale om en voksende eller aftagende eksponentiel funktion. Bestem derefter den relevante fordoblings/halveringskonstant.

a) $f(x)=4\cdot e^{0{,}3x}$ b) $f(x)=0{,}28\cdot e^{-1{,}2x}$ c) $f(x)=12\cdot e^{-0{,}41x}$ d) $f(x)=e^{3x}$

Opgave 59

Lad $f(x)=50\cdot e^{-0{,}08x}$ og $g(x)=3\cdot e^{0{,}12x}$. Løs ligningen $f(x)=g(x)$. Tegn derefter graferne for de to funktioner i det samme koordinatsystem, så du kan se skæringspunktet.

NB! Husk at du i CAS-værktøjet sandsynligvis skal sørge for, at det er det rigtige e, du får frem. Skriver man bare e, kan det være, at det bliver opfattet som en ubekendt og ikke tallet 2,7182818…!

Opgave 60

Bestem fremskrivningsfaktoren for den eksponentielle funktion $f(x)=24\cdot e^{-0{,}24x}$.

6. Eksponentielle modeller

Opgave 61

Forstil dig, at man lægger 1 mønt på første felt af et skakbræt med 64 felter, 2 mønter på det næste felt, 4 på det næste, etc. Altså en fordobling af mønter for hvert nyt felt. Lad os antage, at hver mønt har en tykkelse på 1 mm. Hvor høj ville stablen på det sidste felt da være? Til oplysning kan det nævnes, at et *lysår* er $9{,}46 \cdot 10^{12}$ km .

Opgave 62

Ifølge historisk data fra *Internet Systems Consortium*, udviklede antallet af computere, som indgik i Internettet (hosts) i perioden fra 1991 til 1998, sig således (januar tal)

Årstal	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998
Antal hosts (tusinder)	376	727	1313	2217	4852	9472	16146	29670

a) Vis, ved at foretage eksponentiel regression, at udviklingen af antal hosts med god tilnærmelse udviklede sig eksponentielt, idet x angiver antal år efter 1991 og y angiver antal hosts regnet i tusinder. Angiv værdier for a og b i forskriften $f(x) = b \cdot a^x$.
b) Hvilke antal hosts forudsiger modellen fra a) for de efterfølgende år, dvs. 1999, 2000 og 2001? De virkelige antal for de nævnte tre år er 43230, 72398 og 109574. Kommenter moddelen i forhold til de korrekte tal.
c) Bestem fordoblingstiden for antal hosts i perioden 1991-1998.

Opgave 63

En population udvikler sig med 3,1% pr. år. i perioden fra 2010 til 2019. I 2010 var populationen på 2500. Angiv en model for udviklingen af populationen som funktion af antal år efter 2010.

Opgave 64

To populationer af bakterier er isoleret og udvikler sig hver især eksponentielt de første 30 timer i et laboratorium. Population A vokser med 12% i timen, mens population B, grundet bedre temperaturbetingelser, vokser med 31% i timen. Population A starter med 500 bakterier, mens population B starter med 100 bakterier.

a) Angiv for hver af populationerne en forskrift for den funktion, som beskriver udviklingen af antal bakterier, som funktion af tiden i timer.
b) Beregn, hvornår population B overhaler population A i antal. Tegn desuden grafer for begge funktioner i samme koordinatsystem.
c) Hvornår når populationerne hver især op på 10000 bakterier?
d) Bestem fordoblingstiden for hver af de to populationer.

Opgave 65 (En bakteriekultur)

En bakteriekultur udvikler sig i løbet af 2,5 timer som vist i tabellen nedenfor.

t (min)	0	15	30	45	60	75
Antal	328	575	920	1420	2416	4300

t (min)	90	105	120	135	150
Antal	6615	11500	17930	31145	49300

a) Påvis, at udviklingen tilnærmelsesvist er eksponentiel ved at foretage eksponentiel regression på data. Bestem desuden a og b i $y = b \cdot a^x$.
b) Hvor mange bakterier vil der være til stede efter 3 timer og 30 minutter, hvis tendensen fortsætter?
c) Hvornår var bakteriekulturen oppe på 25000 bakterier?
d) Hvor stor er fordoblingstiden?
e) Hvor mange procent vokser bakteriekulturen med hvert minut?
f) Hvor mange procent vokser bakteriekulturen med for hver 10 minutter?

Opgave 66 (Indbyggertallet i en storby)

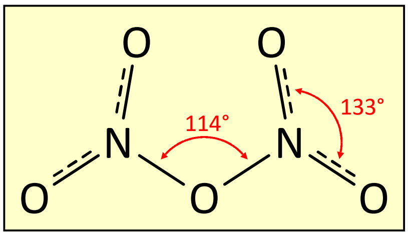
Nedenfor er givet udviklingen af indbyggertallet i en storby i årene fra 1950 til 1990.

Årstal	1950	1955	1960	1970
Indbyggertal	518000	635000	767000	1160000

Årstal	1975	1980	1990
Antal	1330000	1630000	2340000

a) Du skal undersøge Indbyggertallet (regnet i tusinder) som funktion af antal år efter 1950. Foretag eksponentiel regression for at påvise, at udviklingen i indbyggertallet omtrent har været eksponentiel. Angiv a og b i forskriften $f(x) = b \cdot a^x$.
b) Foretag en prognose for, hvor stor befolkningen i byen vil være i år 2010, hvis udviklingen fortsætter som hidtil.
c) Hvornår vil befolkningen være nået 8 millioner, hvis udviklingen fortsætter?
d) Nu kan man jo aldrig vide, om den eksponentielle udvikling vil fortsætte på samme vis. Angiv nogle faktorer, som kan betyde, at udviklingen måske *ikke* vil fortsætte efter denne eksponentielle model.
e) Hvad er den *gennemsnitlige* årlige procentvise stigning i befolkningen i storbyen?
f) Hvor mange procent stiger befolkningens størrelse i gennemsnit med for hver 10 år?

Opgave 67



I den kemiske disciplin *reaktionskinetik* beskæftiger man sig med den hastighed, hvormed kemiske reaktioner forløber. Hvis der er tale om en såkaldt *førsteordens reaktion*, så aftager koncentrationen af stoffet på venstre side i reaktionen eksponentielt med tiden. Vi skal se på et eksempel. Det handler her om stoffet *Dinitrogenpentaoxid*, som er et ustabilt stof, der omdannes til nitrogendioxid og oxygen. Reaktionen ser nærmere bestemt således ud:

$$2\,N_2O_5 \;\rightarrow\; 4\,NO_2 + O_2$$

I et eksperiment er nedenstående målinger af den molære koncentration (enhed M) som funktion af tiden i sekunder gennemført.

Tid (s)	0	100	200	300
Koncentration (M)	0,0200	0,0168	0,0143	0,0120

Tid (s)	400	500	600	700
Koncentration (M)	0,0102	0,0085	0,0072	0,0062

a) Foretag eksponentiel regression for at påvise, at koncentrationen af N_2O_5 aftager eksponentielt med tiden. Sørg i den forbindelse for at indstille CAS-værktøjet, så svaret fås på en form med den naturlige eksponentialfunktion: $f(t) = b \cdot e^{-k \cdot t}$. Angiv værdierne for *b* og *hastighedskonstanten k*.

b) Benyt modellen til at forudsige, hvor stor koncentrationen vil være efter 1000 s.

c) Hvornår er koncentrationen nede på 0,0001 M ifølge modellen?

d) Bestem halveringstiden for koncentrationen af N_2O_5.

e) Hvor mange procent aftager koncentrationen med hvert minut?

newtons afkølingslov

Nikotinplaster

Appendiks A. Lidt om logaritmernes historie

I opgaverne nedenfor får du brug for en logaritme- og antilogaritmetabel. Her er den gammelkendte Erlangs fircifrede logaritmetabel et godt bud.

Opgave A1

a) Foretag følgende multiplikationer og divisioner ved hjælp af logaritme- og antilogaritmetabel:

$$49{,}71\cdot 82{,}35\,;\quad 1356\cdot 778{,}5\,;\quad \frac{23{,}7}{2{,}872}\,;\quad \frac{4{,}214}{0{,}03421}$$

b) Overvej hvordan man nemt kan udføre potensopløftning ved hjælp af logaritmer: Anvend logaritmeregel (L3) fra sætning 15 og find en metode á lá den i eksemplet gennemgået i Appendiks A. Afslut med at anvende metoden til at udregne:

$$3{,}562^5,\quad \sqrt[3]{4{,}578}\,,\quad 5^{2{,}407}$$

c) Kombiner metoderne fra a) og b) og udregn: $\dfrac{3{,}871\cdot 3{,}6^4}{\sqrt{8{,}976}}$.

Kontrollér eventuelt resultaterne på lommeregneren eller i et CAS-værktøj.

Opgave A2

Brug Erlang C's fircifrede logaritmetabeller til at foretage følgende udregninger:

a) $2{,}860\cdot 1{,}533$ b) $0{,}00372\cdot 145$ c) $4{,}067\cdot 6{,}870$ d) $25{,}92\cdot 58{,}91$ e) $4{,}981\cdot 365{,}9$

f) $\dfrac{7{,}201}{3{,}277}$ g) $3{,}876^2$ h) $\sqrt{46{,}82}$ i) $8921\cdot\sqrt[3]{461{,}3}$ j) $\dfrac{7{,}43}{\sqrt{13{,}98}}\cdot 3{,}8^3$ k) $\sqrt{\dfrac{6{,}210}{23{,}78}}$

Appendiks B. Logaritmisk skala

Opgave B1

De fleste CAS-værktøj kan afbilde grafer i koordinatsystemer med logaritmiske akser. Prøv at tegne graferne for nedenstående to funktioner i de angivne områder. I begge tilfælde benytter vi tre dekader på andenaksen, som skal være logaritmisk. Førsteaksen skal være en normal skala. Husk at frembringe et passende antal gitterlinjer, især på andenaksen, så man kan se de store variationer på skalaen – inddel gerne, så hver dekade har 10 underinddelinger. Husk (jf. sætning B1), at graferne gerne skal fremstå som rette linjer i det enkeltlogaritmiske koordinatsystem.

a) Lad $f(x) = 1{,}5 \cdot 1{,}28^x$. Andenaksen skal være logaritmisk med tre dekader fra 0,1 til 100. Førsteaksen skal være almindelig fra –4 til 14.

b) Lad $f(x) = 8 \cdot 0{,}65^x$. Andenaksen skal være logaritmisk med tre dekader fra 0,01 til 10. Førsteaksen skal være almindelig fra 0 til 15.

Opgave B2