Meningsmålinger
og statistisk usikkerhed
for samfundsfag A

Kontakt: vestergaard@matematiksider.dk

Billeder

Forside: ©iStock.com/VectorStory (Crowd)
Side 5: ©iStock.com/Cimmerian (Interview)
Side 6: ©Unknown [Public domain], via Wikimedia Commons (The Literary Digest)
Side 12: ©iStock.com/Chinga_11 (Stemmeboks rev.)
Side 20: ©iStock.com/fokkebok (Tulipaner)

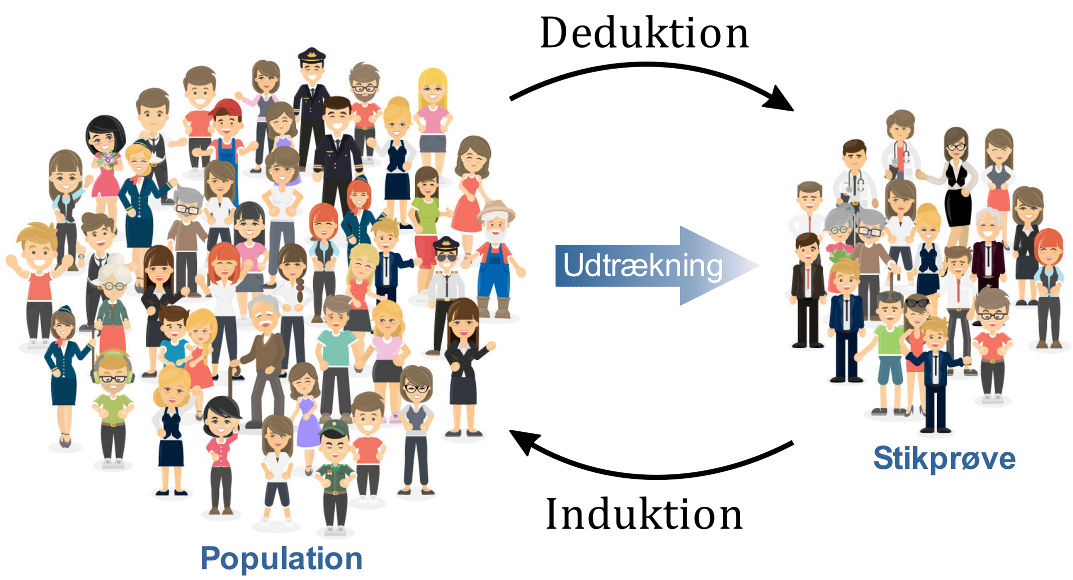
1. Indledning

Dette tillæg er skrevet med henblik på – uden matematiske udledninger – at give STX elever i Samfundsfag A en grundlæggende forståelse af begrebet *statistisk usikkerhed* og *konfidensinterval* for en andel. Udgangspunktet er, at man udtrækker en stikprøve fra populationen med henblik på at kunne vurdere en andel i hele populationen. Der vil være særlig fokus på at benytte metoden i forbindelse med meningsmålinger.

2. Population kontra stikprøve

Indenfor statistikken betyder begrebet *population* helt grundlæggende mængden af *alle* de individer/objekter, som man er interesseret i at undersøge. Ved begrebet en *stikprøve* menes en delmængde af populationen. Ved folketingsvalg i Danmark vil populationen være mængden af alle stemmeberettede danskere, mens en stikprøve vil være en udvalgt del af de stemmeberettede i Danmark. Ved et kommunevalg i en by, vil populationen være mængden af alle stemmeberettede indbyggere i kommunen, mens en stikprøve er en del af disse. Ved en undersøgelse af andelen af syge fisk i et dambrug i Viborg, er populationen mængden af alle fisk i det pågældende dambrug. En stikprøve vil være en udvalgt del af fiskene i det omtalte dambrug.

I statistik forsøger man ofte at sige noget om populationen ud fra en stikprøve. Der er tale om en såkaldt *induktiv* proces: Man benytter viden om det *specielle* eller *specifikke* til at lære noget om det *generelle*.



For fuldstændighedens skyld skal det også nævnes, at processen den modsatte vej, hvor man går fra det generelle til det specifikke, betegnes som en *deduktiv* proces. Man ser den ofte anvendt indenfor sandsynlighedsregning. Her har man ofte fuld viden eller information og ønsker at bestemme sandsynligheden for, at et specielt udfald indtræffer. Det kan for eksempel være kast med to terninger, hvor man ønsker at bestemme sandsynligheden for at få en 3'er og en 6'er.

Meget ville være lettere i samfundet, hvis man havde fuld information. Man ville kunne tage bestik af denne information og handle derefter. *Danmarks Statistik* (DST) har faktisk fuld information om populationen indenfor mange områder. Kommunale, regionale og statslige institutioner har pligt til at indberette om diverse forhold til brug i statistikkerne. Det samme er tilfældet for de fleste private erhvervsvirksomheder. Danmark er således temmelig stærkt reguleret i sammenligning med et land som USA. Mens alle danskere har et CPR-nummer, så må man i USA foretage folketællinger hvert 10. år for bare at se, hvor mange indbyggere landet har. Desværre er fuld information som oftest for dyr at indhente, den kan tage for lang tid at indhente eller den kan ligefrem være umulig at fremskaffe. Det er her en stikprøve kommer ind i billedet. Hvis man udtrækker stikprøven på en fornuftig og tilfældig måde, kan den være med at til sige noget om populationen. Men stikprøven introducerer også en usikkerhed, som ikke ville have været der, hvis man havde fuld information.

3. Stikprøveudtrækning

Det danske samfund anvender i høj grad meningsmålinger til at belyse forhold i samfundet. Det kan være aviser, der vil dokumentere påstandene i en artikel eller politiske partier, som vil underbygge deres politiske synspunkter med den nyeste statistik. Det kan også være prognoser til folketingsvalg. Det vel mest kendte meningsmålings og analyseinstitut er *Gallup*, (Kantar Gallup). Derudover findes en lang række meningsmålingsinstitutter såsom *Epinion*, *Voxmeter*, *Wilke*, *Greens*, *YouGov*, *Norstat*, *Megafon*, *PLS Rambøll*.

Fælles for disse er, at de anvender *stikprøver*. Ved anvendelse af stikprøver indtræffer en anden problematik: Hvordan skal man udforme, udtrække og behandle en stikprøve? Det er faktisk mere kompliceret end de fleste tror. Der er flere aspekter, som man skal tage sig i agt for. Gør man ikke det, kan meningsmålingen blive misvisende.

1. Spørgsmålene skal være tydeligt formuleret, så man ikke risikerer, at nogle forstår spørgsmålet på en anden måde, end det er tiltænkt. Spørgsmålene må ikke være *ledende* eller *værdiladede* o.l.
2. Er der risiko for *usande/uoprigtige* svar fra respondenterne?
3. Er der en *skævhed* eller *bias* i den måde, stikprøven foretages?
4. Stikprøvestørrelsen skal være passende, hverken for lille eller for stor.

Kommentarer:

1) Det er klart, at undersøgelsen vil give et misvisende billede, hvis de deltagende i stikprøven kan misforstå spørgsmålet og svarer på noget helt andet, ligesom svarene kan påvirkes, hvis spørgsmålene ikke er neutralt formulerede.

2) Nogle personer vil ikke stå ved, at de har et bestemt synspunkt eller stemmer på et bestemt parti, hvis det er kontroversielt. De vælger måske at give et svar, som i deres øjne er mere socialt acceptabelt. "DF-effekten" er et godt eksempel. Ved flere valg modtog Dansk Folkeparti højere stemmetal, end prognoserne forudså, fordi en del af

de udspurgte var utilbøjelige til overfor udspørgeren at sige, at de ville stemme på DF. En anden lidt modsatrettet effekt var den, der blev set i 1982 i USA, hvor den sorte amerikaner Tom Bradley efter at ført klart i meningsmålingerne, tabte valget om guvernørposten i Californien – angiveligt fordi folk var tilbageholdende med at fortælle, at de ikke havde i sinde at stemme på en sort kandidat. Effekten har fået navnet "Bradley-effekten". Et tredje forhold, der kan nævnes, er det, hvor personer i stemmeboksen pludselig ændrer holdning og stemmer på en anden kandidat, end den, de har tilkendegivet i meningsmålingen. Alle disse typer usandheder kan være ret svære at kompensere for, men erfaring fra tidligere kan hjælpe lidt.

3) Hvis man ikke passer på, kan der forekomme en *skævhed* eller *bias* i en meningsmåling. Med det menes, at nogle grupper af personer favoriseres på bekostning af andre. Stikprøven bliver dermed ikke *repræsentativ*, og den vil sandsynligvis give et forkert billede af populationen. Man skal nok ikke gå ned på gågaden en formiddag for at gennemføre stikprøven, for da vil man måske møde et overtal af kvinder, pensionister og arbejdsløse, og deres gennemsnitlige holdninger behøver ikke at være afspejlet i hele befolkningen. Ønsker man for eksempel danskernes holdning til, om Danmark skal deltage med soldater i krigszoner, så kan man måske forvente en mere negativ holdning, da kvinder vides gennemgående at være mere imod krig end mænd er.

En bedre mulighed vil nok være at udtrække tilfældige telefonnumre og ringe til ejerne. Og gerne ringe flere gange til nummeret indtil telefonen tages, for at reducere problemet med *Non-response bias*. Sidstnævnte dækker over, at nogle personer ikke ønsker at svare, eller at de er svære at få fat i. Disse personer kan på visse områder have specielle holdninger, og er der for mange ikke-respondenter kan det medføre en skævhed i undersøgelsen. Det gode ved at bruge telefonnumre er, at man nemt kan udvælge en tilfældig mængde telefonnumre, repræsenterende en tilfældig gruppe af danskere. Det er her vigtigt, at stort set alle danskere i dag har en telefon, og mange bruger sin personlige mobiltelefon. Ringes der til en telefon, som bruges af flere personer, for eksempel en fastnettelefon hos en familie, kan udspørgeren eventuelt bede om at tale med den person i familien, som har fødselsdag tidligst på året. Derved undgår man en eventuel bias, hvis det altid er den samme person i familien, som tager telefonen.

The Literary Digest, februar 1921.

Den klassiske bommert, hvad angår bias er den, der blev begået af det amerikanske magasin The *Literary Digest* i 1936. Magasinet havde tidligere leveret prognoser op til præsidentvalg, og det ville magasinet også gøre forud for det forestående præsidentvalg i 1936. Man ville endda gøre det ekstra grundigt ved at inkludere ekstra mange personer. Meningsmålingen (stikprøven) viste, at den republikanske kandidat til præsidentvalget ville vinde klart. I virkeligheden viste det sig, at den demokratiske kandidat Franklin D. Roosevelt vandt stort. Stikprøven havde altså en kæmpe bias! Stikprøvens udvælgelse var foregået ved at man for det første udspurgte egne læsere. Desuden gjorde man brug af tilgængelige lister over registrerede bilejere samt telefonlister. Alt i alt blev folk med højere indkomst favoriseret i stikprøven. Man har senere analyseret sig frem til, at der faktisk er en fjerde og endnu mere væsentlig årsag til skævheden: Kun godt 2,27 mio. personer ud af de 10 mio. kontaktede personer svarede på henvendelsen. Dermed kom det tidligere nævnte problem med non-response bias til udtryk: Folk, som ikke brød sig om den demokratiske kandidat Roosevelt havde stærke følelser og var mere villige til at bruge tid på at svare på henvendelsen! En anden lære af hændelsen er: *Når en udvælgelsesprocedure er skæv, så hjælper det ikke at tage en større stikprøve. Det vil blot gentage fejltagelsen i større målestok!* En vigtig grund til, at magasinet tog så stor fejl i 1936 og ikke ved tidligere valg var, at ved valget i 1936 fulgte de politiske holdninger som noget nyt mere indbyggernes økonomiske status.

Amerikaneren *George Horace Gallup*, derimod, forudsagde i sit nystartede meningsmålingsinstitut udfaldet af valget i 1936 med en afvigelse på kun 1%, og han anvendte endda kun en stikprøve på 50.000 personer. Det var et gennembrud for den relativt unge Gallup. Han regnes som en pionér ved at professionalisere metoderne i meningsmålinger. Kantar Gallup (TNS Gallup) er et dansk analyseinstitut beliggende på Østerbro i København, opkaldt efter George Gallup. Det var den danske reklamemand Haagen Wahl Asmussen, der i 1939 kontaktede George Gallup. Han lykkedes med at få eneret på Gallups navn og metoder i de nordiske lande.

En anden mulig kilde til bias i en meningsmåling er *selvselektion*. Hermed menes, at personerne i stikprøven melder sig selv til undersøgelsen. Det er for eksempel tilfældet, hvis man lægger nogle spørgsmål bredt ud på Internettet, og meningsmålingen bygger på dem, der tilfældigvis svarer. Problemet kan være, at respondenterne ikke er repræsentative. Det kan være, at folk, som har stærke følelser for de pågældende spørgsmål, er særlig tilbøjelige til at svare på undersøgelsen. Eller måske er det bare generelt set mere "debatterende personer", som responderer. De kan repræsentere en særlig holdning i samfundet i forhold til de personer, som gemmer sig mere væk.

En væsentlig årsag til en anden type skævhed er hvis en interviewer selv får lov til at vælge, hvem der skal interviewes, eventuelt indenfor en bestemt undergruppe. Det var faktisk årsagen til en anden kendt fejlbedømmelse ved præsidentvalget i 1948 i USA. Et problem ved at overlade for meget til menneskets valg er, at intervieweren vil udspørge dem, der er lettest at få fat i (*tilgængelig selektion*). I 1948 resulterede det i, at man udvalgte for mange republikanere, da de var en smule nemmere at interviewe.

4) Vi er kommet til stikprøvens størrelse. For det første skal stikprøven ikke være for lille. Er den det, vil konklusionen for det første blive meget usikker; for det andet kan det også betyde, at den formel for statistisk usikkerhed, som vi senere præsenterer i sætning 1, ikke er gyldig (se bemærkning 2 side 10). En stikprøvestørrelse på under 100 er sjældent brugbar. Stikprøven må helst heller ikke være for stor i forhold til populationen. Er den det, kan formlen for den statistiske usikkerhed i hvert fald ikke bruges. Den bygger nemlig på binomialfordelingen, og dens brug kræver, at der er tale om udtrækning *med tilbagelægning*. Men alle stikprøver er jo foretaget *uden tilbagelægning*. Hvis stikprøven for eksempel er 1/4 af populationen, vil denne forskel få betydning. En tommelfingerregel er, at stikprøven i hvert fald ikke må overstige 5-10% af populationen, hvis formlen for statistisk usikkerhed skal kunne bruges. Heldigvis er stikprøverne normalt meget mindre end populationen, og så er formlen for den statistiske usikkerhed meget præcis. Som oftest anvender meningsmålingsinstitutterne stikprøvestørrelser på 1000-1500. Det giver en tilpas lille statistisk usikkerhed. Man ville godt nok kunne få mindre usikkerhed ved at øge stikprøvestørrelsen, men det vil så koste en del mere. Man kan sige, at *marginalnytten* ved at øge stikprøven aftager kraftig efter en stikprøvestørrelse på omkring 1500 (se opgave 16).

Korrektion for skævhed

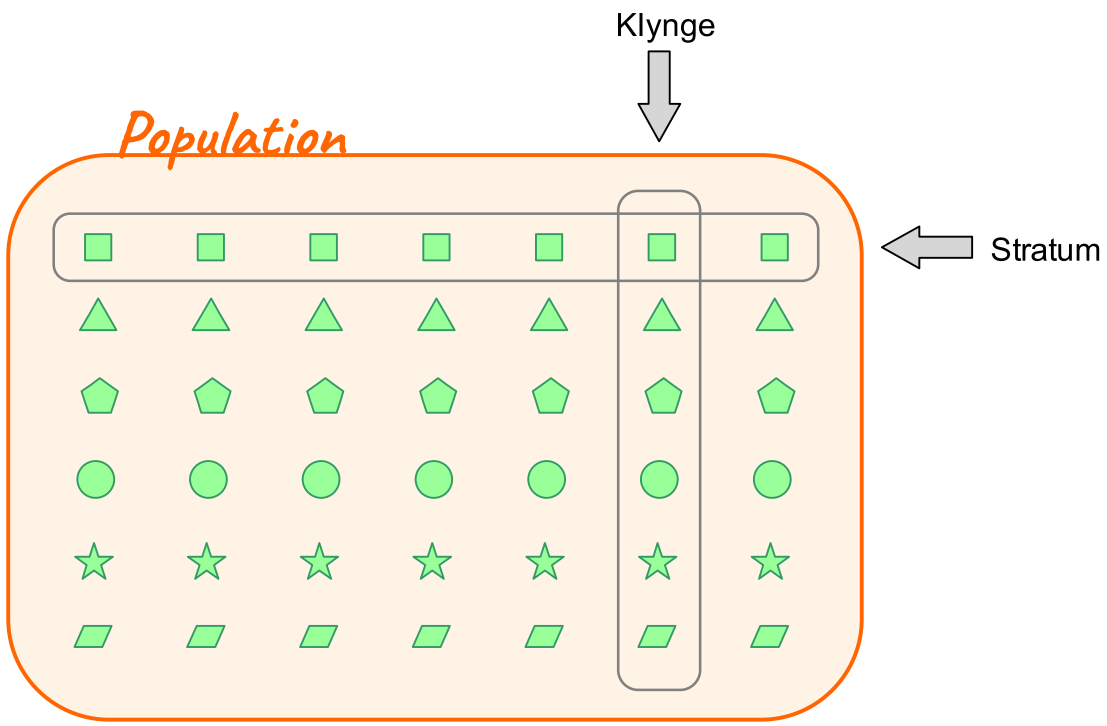
Man kan til en vis grad korrigere for skævheder i en stikprøve, hvis man er i besiddelse af ekstra information om respondenterne, koblet til deres svar. Det kan være oplysninger såsom *køn*, *alder*, *uddannelse* og *indkomst*. Hvis man for eksempel vil korrigere for, at der i stikprøven var 60% kvinder og 40% mænd, så skal man altså *vægte* mændenes svar højere, for at få et mere retvisende estimat på populationsplan eftersom der her er ca. 50% af hver køn. Se eventuelt opgaverne 8 og 9. Det er – om muligt – bedre at designe stikprøven, så man undgår at skulle korrigere for skævhed ved vægtning, da det faktisk forøger den statistiske usikkerhed!

Typer af stikprøveudvælgelser

Vi skal kort omtale tre hovedtyper af stikprøveudvælgelse:

- Simpel tilfældig udvælgelse
- Stratificeret udvælgelse
- Klyngeudvælgelse

Simpel tilfældig udvælgelse: Der foretages en simpel *lodtrækning* om, hvem der skal med i undersøgelsen. Metoden kan lyde enklere, end den er i praksis. Har man en liste med navne eller fx CPR-numre at udtrække fra? Hvordan får man fat i folk? Vil de deltage?



På figuren: Ens geometriske figurer repræsenterer personer som har mindst én ting til fælles – som er *forskellig* fra den, der måles på, fx alder, køn, geografisk placering.

Stratificeret udvælgelse: Populationen inddeles i grupper (*strata*), fx efter alder, køn eller geografisk placering. I hvert stratum foretages en simpel tilfældig stikprøve. Ud fra andelene i hvert stratum kan man beregne sig til et bud på andelen i hele populationen. Fordelen ved at anvende stratificeret udvælgelse er normalt, at de enkelte strata er *homogene*, dvs. mere ensartede. Det betyder ofte mindre variation i hvert stratum. Alt i alt kan man faktisk ende med, at den endelige værdi for andelen har *mindre* statistisk usikkerhed end tilfældet ville have været, hvis man havde anvendt simpel tilfældig udvælgelse. Metoden er særlig god, hvis der er stor variation i populationen.

Klyngeudvælgelse: Hvis man beslutter sig for en klyngeudvælgelse er det først og fremmest fordi det er billigere! Mens strata er homogene, er klynger ofte *heterogene*. Hver klynge søges sammensat, så den enkelte klynges sammensætning er repæsentativ for hele populationens sammensætning. Når hele populationen er inddelt i klynger, vælger man først ved simpel tilfældig udvælgelse nogle af klyngerne. Indenfor hver af disse klynger kan man enten bruge alle elementerne (ét-trinsmetoden) eller man kan i hver klynge udvælge nogle af elementerne ved en ny simpel tilfældig udvælgelse (to-trins-metoden).

Typer af meningsmålinger

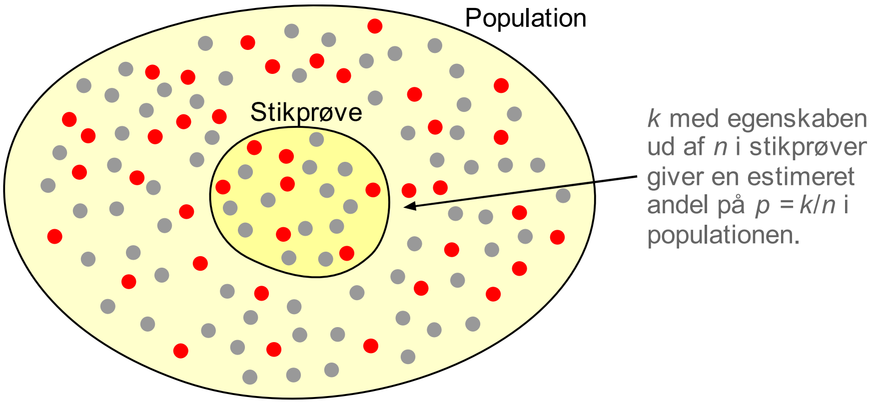
Alt efter formålet, benyttes forskellige typer meningsmålinger: *Besøgsinterviews*, *telefoninterviews*, *web-interviews*. I dag bruger Gallup for eksempel i høj grad web-interviews. Ikke sådan, at tilfældige personer selv vælger at respondere på en undersøgelse på en frit tilgængelig hjemmeside, nej det foretages med stor kontrol ved, at man har et større webpanel med 50.000 personer. Ud af dem foretages en stratificeret udvælgelse af ca. 1000-1500 personer ud fra baggrundsdata. De kontaktes herefter. Derved opnår man en stor grad af repræsentativitet. Telefoninterviews benyttes også stadig en del, men ikke så meget som tidligere. Til nogle typer meningsmålinger er det eneste mulighed.

4. Konfidensinterval for en andel

Konfidensintervaller benyttes i mange sammenhænge i statistik. Vi skal specielt se på den type, hvor man ønsker at bestemme den statistiske usikkerhed på en *andel*. Man ønsker at vurdere den andel eller procentdel af elementerne i populationen, som har en bestemt egenskab. Det kan eksempelvis være en meningsmåling, hvor man ønsker at vurdere, hvor stor en del af vælgerne, som vil stemme på Socialdemokratiet ved det kommende valg. Det kan også være, at man i et dambrug opsamler en stikprøve for at anslå, hvor stor en del af alle fiskene, som er ramt af en bestemt sygdom. Et tredje eksempel kan handle om tulipanløg i et gartneri. Ved at undersøge en tilfældig udvalgt stikprøve af tulipanløgene, forsøger man at give et bud på, hvor stor en andel af gartneriets tulipanløg, som vil spire. Altså en meget generel problemstilling.

Uanset hvor veltilrettelagt processen med at udtrække stikprøven er, kan man aldrig komme ud over, at der er en *tilfældighed* indbygget, lidt på samme måde som når man slår med terninger. Som tidligere nævnt bruger vi stikprøven til at udtale os om populationen. For at kunne vurdere usikkerheden herved, er man nødt til at vide med hvilken sandsynlighed stikprøven er fremkommet. Det er her sandsynlighedsregningen kommer ind. Vi bruger altså sandsynlighedsregningen til at få styr på statistikken. Helt konkret kommer *binomialfordelingen* og *normalfordelingen* i spil her. Aspekter af disse fordelinger bliver gennemgået i mat B/mat A i STX. I denne fremstilling skal vi dog bare vide, at de fører til den formel for den statistiske usikkerhed u, som ses angivet i sætningen på næste side.

Udgangspunktet er følgende: Der udtrækkes ved *simpel tilfældig udtrækning* en stikprøve på n elementer fra populationen. Heraf har k af elementerne i stikprøven den betragtede egenskab. Et naturligt bud på den søgte andel i populationen er da den andel, man registrerer i stikprøven, altså $p = k/n$. Denne såkaldte *estimerede andel* er sjældent eksakt lig med den rigtige andel med egenskaben i populationen. Sidstnævnte vil vi betegne med p_0. Normalt vil p være større eller mindre end p_0, men forhåbentligt tæt på. Den statistiske usikkerhed skal give os et fingerpeg om, hvor meget, vi kan regne med p.



Sætning 1 (Konfidensinterval for en andel)

Givet en population, hvor man ønsker at vurdere den *andel* p_0 af elementerne i populationen, som har en given egenskab. En stikprøve af størrelsen n udtrækkes på tilfældig vis fra populationen. Hvis k elementer i stikprøven har den pågældende egenskab, så er estimatet $p = k/n$ det bedste bud på den korrekte andel p_0. Den statistiske usikkerhed på estimatet kan angives ved et såkaldt 95%-konfidensinterval.

$$(1) \qquad [p-u,\ p+u] \quad \text{hvor} \quad u = 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}}$$

u kalder vi for den *statistiske usikkerhed* eller bare usikkerheden.

Bemærkning 2

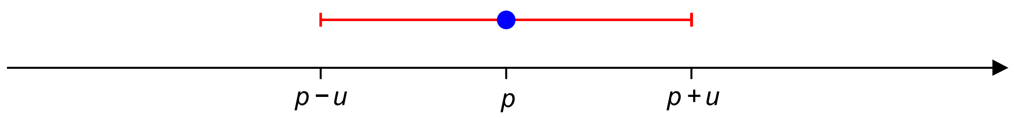
Der er tale om en approksimativ formel for usikkerheden, som er meget præcis, hvis bare stikprøve størrelsen er tilstrækkelig stor. Som en tommelfingerregel bør n opfylde:

$$n \geq 30 \ \wedge \ n \geq \frac{10}{p} \ \wedge \ n > \frac{10}{1-p}$$

Et andet krav er, at stikprøven skal være lille i forhold til populationen. Som en tommelfingerregel bør stikprøven ikke udgøre mere end 5-10% af populationen. Disse betingelser er som regel altid opfyldt i praktiske anvendelser.

□

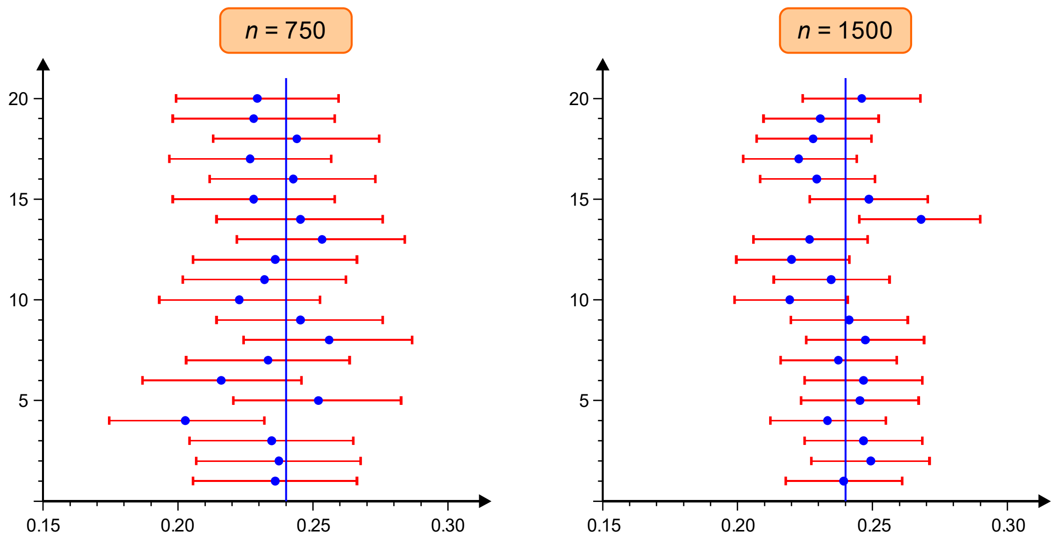
Vi kan illustrere konfidensintervallet grafisk som vist nedenfor. Intervallet er centreret i den estimerede andel p og går derefter usikkerheden u til hver side.



Konfidensintervallets fortolkning

Hvad fortæller dette konfidensinterval egentligt? For det første er det meget vigtigt at indse, at konfidensintervallet afhænger af den konkrete stikprøve! Intervallet er jo centreret om den estimerede andel p, og den kan jo sagtens være forskellig fra stikprøve til stikprøve. Usikkerheden u afhænger faktisk også lidt af stikprøven. Men hvad betyder de 95% så? Jo, det skal forstås sådan, at hvis man tager et hav af stikprøver, så vil ca. 95% af disse intervaller "ramme" den rigtige andel p_0. Nedenfor er vist en simulation, hvor man har ladet en computer tilfældigt udtrække 20 forskellige stikprøver fra populationen. Populationsandelen vides her at være $p_0 = 24\% = 0{,}24$. I situationen til venstre med stikprøvestørrelse 750 ser vi, at alle intervallerne på nær ét (det fjerde nederste) rammer den rigtige andel på 0,24. Det svarer i dette tilfælde til en succesrate på netop 95%.

I situationen til højre har vi fordoblet stikprøvestørrelsen. Det giver mindre usikkerhed u, helt i overensstemmelse med intuitionen: Jo større stikprøve, jo tættere vil den estimerede andel almindeligvis være på den korrekte andel. Tilfældighederne vil normalt udjævne hinanden, så man ender tæt på middelværdien. Det er de *store tals lov*, der er i spil! Slår man for eksempel 6000 gange med en ægte terning, så kan man godt regne med, at andelen af seksere vil være meget tæt på 1/6. Slår man derimod kun 6 gange med en terning, så kan det nemt hænde, at fx halvdelen eller ingen er seksere.



Der florerer en del fejlagtige fortolkninger af konfidensintervallet i både bøger og på Internettet. En af dem er:

~~Den rigtige andel ligger med 95% sandsynlighed i konfidensintervallet~~

Det er imidlertid principielt forkert! Konfidensintervallet er nemlig fast, så snart stikprøven er taget, og det samme er p_0. Der er altså slet ikke noget stokastisk (tilfældigt) i spil, man kender blot ikke p_0. Enten ligger p_0 i intervallet eller også gør det ikke! I stedet for at misbruge sandsynlighedsbegrebet, kan man benytte denne formulering:

Konfidensintervallet indeholder med 95% *sikkerhed* den rigtige andel

Eller følgende:

Der er 95% *tillid* til at konfidensintervallet indeholder den rigtige andel

Det sidste er i øvrigt også fint i overensstemmelse med ordet *konfidens*.

Bemærkning 3

Man kan også tale om for eksempel 90%-konfidensinterval og 99%-konfidensinterval. Jo større procent, jo større statistisk usikkerhed og jo længere interval. Hvad angår 90%, så kan sætning 1 bruges, hvor man udskifter faktoren 1,96 med 1,64. For et 99%-konfidensinterval skal bruges faktoren 2,58. Man taler *ikke* om et 100%-konfidensinterval. I så fald skulle man normalt bruge intervallet $[0,1]=[0\%,100\%]$, hvilket er ingen information!

□

Eksempel 4 (Meningsmåling)

Et politisk parti fik ved sidste folketingsvalg 15,2% af stemmerne. I en meningsmåling umiddelbart før det kommende valg er resultatet, at 156 ud af 900 siger, at de vil stemme på det pågældende parti.

a) Bestem 95% konfidensintervallet for partiets nuværende tilslutning.
b) Afgør om der er en signifikant ændring i partiets tilslutning.

Løsning:

a) Den estimerede andel af stemmer på partiet udregnes:

$$p = \frac{k}{n} = \frac{156}{900} = 0{,}17333$$

Og den statistiske usikkerhed:

$$u = 1{,}96\cdot\sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}} = 1{,}96\cdot\sqrt{\frac{0{,}17333\cdot(1-0{,}17333)}{900}} = 0{,}02473$$

Endepunkterne i konfidensintervallet:

$$p-u \;=\; 0{,}17333-0{,}02473 \;=\; 0{,}14860 \;=\; 14{,}860\%$$
$$p+u \;=\; 0{,}1733+0{,}02473 \;=\; 0{,}19806 \;=\; 19{,}806\%$$

Vi har undervejs medtaget ekstra cifre i mellemregningerne for at modvirke, at afrundingsfejl hober sig op. Til slut kan vi dog roligt afrunde til 1. decimal, hvilket giver følgende konfidensinterval:

$$\left[14{,}9\%;19{,}8\%\right]$$

b) Da resultatet fra forrige valg var 15,2% og dette tal ligger i konfidensintervallet, er der *ikke* grundlag for – indenfor den statistiske usikkerhed – at påstå, at partiet nu har en ændret tilslutning sammenlignet med sidste valg.

□

Eksempel 5 (Meningsmåling før valg – brug af Excel)

Vi skal i et fiktivt eksempel se, hvordan man kan bruge valgresultaterne fra forrige valg samt en ny meningsmåling og kendskabet til stikprøvestørrelsen til at vurdere, om partierne i et forestående valg står til en (signifikant) fremgang, tilbagegang eller ingen af delene. For at afgøre det, skal der først beregnes konfidensintervaller. I vores eksempel er der 6 partier, hvor stemmeresultaterne fra forrige valg står i søjle B. I søjle C er anbragt resultaterne af den nylige meningsmåling. Begge sæt af værdier er angivet i %. Stikprøvestørrelsen oplyses at være 1580.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Meningsmåling før kommende valg								
2	Stikprøvestørrelse: 1580								
3									
4	Parti	Valg (%)	Men. p (%)	p	u	u (%)	Venstre (%)	Højre (%)	
5	A	7,8	7,2	0,072	0,013	1,3	5,9	8,5	
6	B	20,3	18,5	0,185	0,019	1,9	16,6	20,4	
7	C	14,2	18,3	0,183	0,019	1,9	16,4	20,2	
8	D	31,3	28,2	0,282	0,022	2,2	26,0	30,4	
9	E	9,7	11,8	0,118	0,016	1,6	10,2	13,4	
10	F	16,7	16,0	0,160	0,018	1,8	14,2	17,8	
11									

Lad os af hensyn til forståelsen først overveje, hvordan vi ville beregne konfidensintervallet for parti A *uden* brug af Excel. For det første indser vi, at den estimerede andel p egentligt bare er værdien fra meningsmålingen, altså $7{,}2\% = 0{,}072$. Vi kan nu i stil med eksempel 3 benytte formlen i sætning 1 til at bestemme den statistiske usikkerhed:

$$u \;=\; 1{,}96\cdot\sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}} \;=\; 1{,}96\cdot\sqrt{\frac{0{,}072\cdot(1-0{,}072)}{1580}} \;=\; 0{,}01275$$

Dernæst bestemmes endepunkterne i konfidensintervallet, igen som i eksempel 3:

$$p-u \;=\; 0{,}072-0{,}01275 \;=\; 0{,}05925 \;=\; 5{,}925\%$$

$$p+u \;=\; 0{,}072+0{,}01275 \;=\; 0{,}08475 \;=\; 8{,}475\%$$

Regner vi i procent og med 1 decimals nøjagtighed, er konfidensintervallet altså lig med følgende: $\left[5{,}9\%;\,8{,}5\%\right]$. Det forrige valgresultat på 7,8% ligger i konfidensintervallet. Derfor siger vi, at der hverken er signifikant fremgang eller tilbagegang for partiet A.

For at løse opgaven mere automatisk i Excel, skal vi udfylde søjlerne fra D til og med H, som vist på figuren ovenfor. Det vi gør, skal afspejle det, vi gjorde "manuelt" ovenfor. Først omregnes p til kommatal i søjle D ved at dividere med 100. Ved hjælp af p i kommatal og stikprøvestørrelsen $n=1580$ udregnes den statistiske usikkerhed u i søjle E. I søjle F omregnes u til procentværdier ved at gange med 100. Endelig kan vi bestemme henholdsvis venstre og højre endepunkt af konfidensintervallet ved hjælp af de respektive formler $p-u$ og $p+u$. Da vi ønsker konfidensintervallerne i procent, bruger vi her søjlerne C og F. I det følgende antages det, at læseren er bekendt med de grundlæggende teknikker i Microsoft Excel, herunder hvordan man skriver formler i celler og efterfølgende nedkopierer. De formler, som skal skrives ind i felterne fra D5 til og med H5 er:

I celle D5: **`=C5/100`**
I celle E5: **`=1,96*kvrod(D5*(1-D5)/1580)`**
I celle F5: **`=E5*100`**
I celle G5: **`=C5-F5`**
I celle H5: **`=C5+F5`**

Hvis konfidensintervallet hørende til meningsmålingen ligger helt til *højre* for forrige valgresultat siger vi, at meningsmålingen viser en signifikant *fremgang* for partiet. Hvis konfidensintervallet derimod ligger helt til venstre for værdien ved sidste valg, så siger vi, at meningsmålingen viser en signifikant *tilbagegang*. Hvis ingen af delene er tilfældet, dvs. forrige valgresultat ligger indenfor konfidensintervallet, så viser meningsmålingen hverken en signifikant tilbagegang eller fremgang for partiet. Ved at studere figuren ser vi, at meningsmålingerne forudsiger en signifikant fremgang til partierne C og E, mens partiet D står til en signifikant tilbagegang.

NB! Excel regnearket i dette eksempel er vedhæftet denne pdf-fil. De nærmere detaljer er desuden vist i en skærmvideo, som kan findes på min hjemmeside.

□

Følgende er vigtigt at erkende:

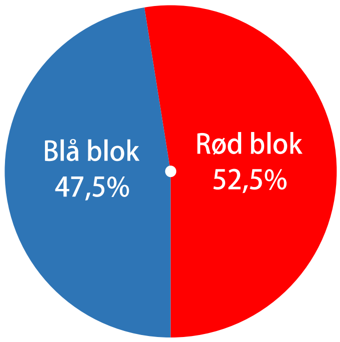
Forskellige stikprøver fra den samme population giver normalt anledning til forskellige estimerede andele, og dermed forskellige konfidensintervaller. Det kan eventuelt føre til forskellige konklusioner.

Appendiks A – Kan blå blok vinde?

I dette appendiks ser vi på en type spørgsmål, som er interessant, men som i skrivende stund ikke er obligatorisk i samfundsfag A, STX. Udgangspunktet er, at der er foretaget en meningsmåling umiddelbart forud for et folketingsvalg. Den ene blok (rød eller blå) har fået færre stemmer i meningsmålingen (stikprøven) end den anden blok. Spørgsmålet er, om førstnævnte alligevel kan tænkes at have størst tilslutning i befolkningen og dermed kan vinde valget?

Det skal tilføjes, at vi her ikke kan tage hensyn til, at nogle partier i den ene eller anden blok kan falde ud på grund af 2% reglen, at det rigtige valg normalt holdes nogle dage senere og der derfor kan komme politiske meldinger i mellemtiden, som kan vende rundt på tingene, eller folk kan ændre holdning i stemmeboksen. Ej heller kan der tages hensyn til de lidt indviklede mandatfordelinger (fx kredsmandater). Vi antager desuden, at der ikke er neutrale partier, som først skal forhandle om flertallet med en af blokkene. Det, nedenstående beregninger kan, er udelukkende at udtale sig om den tilfældighed og deraf følgende usikkerhed, der naturligt er, når man prøver at sige noget om populationen ud fra en relativ lille stikprøve. Stikprøven antages udtaget ved simpel tilfældig udvælgelse.

Eksempel 8



I en meningsmåling op til et valg viser det sig, at 356 stemmer ud af 750 stemmer er faldet på blå blok og resten på rød blok. Det svarer til en stemmeandel på $\frac{356}{750} = 0{,}475 = 47{,}5\%$ til blå blok. Spørgsmålet er, om blå blok med dette resultat kan gøre sig forhåbninger om alligevel af vinde valget (= få flest stemme i befolkningen) indenfor den statistiske usikkerhed? Til at afgøre det, skal vi gøre brug af et "venstresidet konfidensinterval" med et *konfidensniveau* på 95%. Da der er tale om et enkeltsidet konfidensinterval, bliver faktoren foran kvadratroden i den statiske usikkerhed en anden, her 1,64:

Den estimerede andel af stemmer på partiet udregnes:

$$p = \frac{k}{n} = \frac{356}{750} = 0{,}47467$$

Og den statistiske usikkerhed:

$$u = 1{,}64 \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}} = 1{,}64 \cdot \sqrt{\frac{0{,}47467 \cdot (1-0{,}47467)}{750}} = 0{,}0300$$

$$p + u = 0{,}47467 + 0{,}02999 = 0{,}50466 = 50{,}466\%$$

Konfidensintervallet:

$$[0, p+u] = [0\,;50{,}5\%]$$

Fortolkningen af intervallet: Vi kan være 95% sikre på, at dette interval indeholder den rigtige andel p_0 for blå blok i populationen. Eftersom 50% ligger i intervallet er håbet om flertallet for blå blok stadig indenfor den statistiske usikkerheds muligheder.

Bemærkning 9

Hvis man havde spurgt *dobbelt* så mange personer i stikprøven og opnået nøjagtig den samme andel på blå blok, så ville det give anledning til et venstresidet konfidensinterval på $[0\,;49{,}6\%]$, som vi kan se *ikke* indeholder 50%. Ifølge stikprøven ligger blå bloks muligheder for at opnå flertal altså *udenfor* den statistiske usikkerhed. Det betyder ikke, at det er umuligt at blå blok vinder i populationen. Det kan jo være, at denne stikprøve, som vi baserer hele vurderingen på, er meget usædvanlig. Men med den matematik, som "er indbygget i konfidensintervallet", skal vores stikprøve virkelig være *meget* usædvanlig for at blå blok vinder i populationen. Tilbage til problematikken med den fordoblede stikprøvestørrelse: Årsagen til forskellen på de to konklusioner – trods det at den estimerede andel er den samme i de to tilfælde – ligger i det faktum, at jo større stikprøve jo mindre statistisk usikkerhed!

□

OPGAVER

Opgaver med en stjerne (*) er lidt sværere.

Opgave 1 (Deduktiv eller induktiv?)

Overvej om hver af følgende processer er deduktive eller induktive:

a) Lærke kaster med en terning. Hun ønsker at bestemme sandsynligheden for, at terningen viser højst 2 øjne.

b) En spiller på et Casino ønsker at undersøge, om en given terning er ægte eller uægte. Til at vurdere det, slår han 1200 gange med en terning.

Opgave 2 (Danmarks Statistik)

a) Hvad er missionen for instituttet Danmarks Statistik (DST). Kig eventuelt her: https://www.dst.dk/da/OmDS/strategi-og-kvalitet/vaerdier

b) Find et godt eksempel i DST's *Statistikbank*, hvor man har en statistik med fuld information og dermed ingen usikkerhed. Hvordan er Statistikbanken organiseret?

c) Find nogle eksempler på nogle forhold, som kommuner og private virksomheder har pligt til at indberette til DST.

Opgave 3 (Formuleringer)

Hvilke spørgsmål i en meningsmåling lægger mest op til usande/pyntede svar:

a) "Dyrker du sport?" eller "Hvornår dyrkede du sport sidst"?

b) "Giver du dit barn sund mad?" eller "Hvad serverede du for dit barn i går?".

Opgave 4 (Hus-effekten)

Hus-effekter eller *House-effects* hentyder til den observation, at nogle analyseinstitutter for visse partier/kandidater næsten konsekvent skyder over eller konsekvent under det, som andre analyseinstitutter kommer frem til. Undersøg fænomenet ved at søge på Internettet. Hvad skyldes denne effekt?

Opgave 5 (Meningsundersøgelse)

En samfundsfagsklasse på Haderslev Katedralskole ønsker at afdække danske gymnasieelevers syn på flygtninge. De sender en besked ud til alle elever på skolen og beder dem om at give deres holdning til kende: a) Flygtninge klarer sig godt i Danmark, b) Flygtninge klarer sig OK i Danmark, c) Flygtninge klarer sig ringe i Danmark. Det viser sig, at 71 elever responderer. Klassen udregner procenterne i hver kategori og skriver en artikel. Nævn flere problemer ved denne undersøgelse.

Opgave 6 (Meningsundersøgelse)

Kurt vil gerne undersøge danskernes holdning til talentshowet X factor på TV2. Han lægger følgende spørgsmål ud på Facebook:

a) Er X factor er et godt program?
b) Er sangerne i programmet dygtige sangere?

Kurt modtager 108 svar og tæller svarene sammen, hvorefter han konkluderer at 68% af danskerne mener at X Factor er et godt program samt at 45% af danskerne mener at sangerne er dygtige. Er det en brugbar undersøgelse? Påpeg flere uheldige ting ved undersøgelsen.

Opgave 7 (Meningsundersøgelse)

På Ekstra Bladets hjemmeside ser man ret ofte spørgsmål lagt ud, hvor læsere frit kan afgive deres stemme ved klik. Bare et enkelt eksempel på spørgsmål med svarmuligheder:

Hvad synes du om at lagre vindmøllestrøm?
a) Fantastisk, mere af det.
b) Dårlig idé, jeg synes, at vi skal satse mere på atomkraft
c) Ved ikke

Argumenter for, at hvis man ønsker den almindelige danskers syn på et sådant spørgsmål, så kan resultatet kun bruges som en meget grov og usikker tilkendegivelse. Hvilke skævheder kan der tænkes at være i spil i denne meget billige form for undersøgelse?

Bemærkning: Det skal retfærdigvis siges, at når aviserne ønsker mere valide meningsmålinger, så kan de købe sig til det hos et analyseinstitut. Gallup udfører for eksempel webundersøgelser/interviews, hvor de har adgang til et stort *panel* af deltagere, hvoraf man via baggrundsoplysninger kan udtrække en stikprøve på 1000-1500 personer.

Opgave 8 (Korrektion for skævhed)

I en (tænkt) meningsmåling blev 1200 personer spurgt, om de gik ind for øremærket barsel til mænd. I undersøgelsen deltog 700 kvinder og 500 mænd. Blandt kvinderne stemte 427 ja, mens tallet for mænd var 185.

a) Hvor mange procent af kvinderne i undersøgelsen stemte ja?
b) Hvor mange procent af mændene i undersøgelsen stemte ja?
c) Vis, at hvis man *ikke* korrigerer for køn i stikprøven, så vil stikprøven give en estimeret tilslutning på 51% i befolkningen.
d) Vis, at hvis man foretager en korrektion for køn i stikprøven (antaget 50% mænd og 50% kvinder i befolkningen), så vil stikprøven give en estimeret tilslutning på 49% i befolkningen.

Opgave 9* (Korrektion for skævhed)

I en (tænkt) meningsmåling blev 1650 danskere hver stillet to spørgsmål:

1) Går du i kirke mindst en gang om måneden?
2) Bor du i Jylland?

Resultaterne af undersøgelsen fremgår af nedenstående skema:

	A	B	C	D	E	F
1			Fra Jylland?			
2			Ja	Nej	I alt	
3	Går i kirke mindst	Ja	77	36	113	
4	en gang om måneden?	Nej	851	686	1537	
5		I alt	928	722	1650	
6						

Det oplyses, at 45,4% af danskerne bor i Jylland og resten udenfor.

a) Hvor stor en del af personerne fra stikprøven går i kirke mindst en gang om måneden?

Der er en skævhed i undersøgelsen derved, at stikprøven har uforholdsvis mange deltagere fra Jylland i forhold til, hvor stor en del, de udgør af befolkningen. Derfor skal der korrigeres for geografi.

b) Vi at den estimerede andel af danskere, som går i kirke mindst en gang om måneden skal korrigeres nedad til 6,5%.

Opgave 10 (Konfidensinterval)

I en meningsmåling op til det kommende kommunalvalg i en kommune i Sydjylland fik Venstre 347 stemmer ud af de 1190 adspurgte.

a) Bestem den estimerede andel af stemmer på Venstre i kommunen.
b) Bestem værdien for den statistiske usikkerhed u.
c) Bestem 95% konfidensintervallet for partiets tilslutning.

Opgave 11 (Konfidensinterval)

Ved en meningsmåling op til et valg, spørges 1100 personer om hvilket parti, de vil stemme på. I alt 238 siger, at de vil stemme på partiet P.

a) Bestem den estimerede andel af stemmer på partiet i populationen.
b) Bestem værdien for den statistiske usikkerhed u.
c) Bestem 95% konfidensintervallet for partiets tilslutning.
d) Hvor stor skulle stikprøvestørrelsen have været, hvis den statistiske usikkerhed skulle have været nede på 1,0% (med samme estimerede andel)?

Opgave 12 (Konfidensinterval - spirende tulipanløg)

I denne opgave skal vi se, at man kan bruge konfidensintervaller til andet end bare meningsmålinger. Hver gang man ønsker estimeret en *andel* i en population, kan sætning 1 side 10 benyttes. Antag for eksempel, at en gartner påstår, at 75% af hans tulipanløg vil spire. For at vurdere sandfærdigheden heraf udtrækker en person på tilfældigvis en stikprøve på 550 løg, som derefter plantes. Det viser sig, at 399 ud af de 550 tulipanløg spirer.

a) Hvad er populationen i det konkrete tilfælde?
b) Bestem den estimerede andel af spirende tulipanløg i populationen.
c) Bestem et konfidensinterval for andelen af tulipanløg, som vil spire i populationen.
d) Bekræfter stikprøven gartnerens udsagn indenfor den statistiske usikkerhed?

Opgave 13 (Meningsmåling før valg)

Ved forrige valg fik 7 partier de stemmeandele, som fremgår af søjle B på figuren nedenfor. Op til det kommende nyvalg har et meningsmålingsinstitut foretaget en meningsmåling, hvor 1340 blev spurgt om, hvad de nu vil stemme på. Det er anført i søjle C.

a) Udfyld de tomme søjler i tabellen nedenfor på samme måde, som det blev gjort i eksempel 5 (NB! Der kan arbejdes direkte videre i en vedhæftet Excel-fil).
b) Benyt det udfyldte Excel regneark til at afgøre hvilke partier, som ifølge meningsmålingen står til en signifikant fremgang eller signifikant tilbagegang – altså ændringer, som ligger *udenfor* den statistiske usikkerhed.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	**Meningsmåling før kommende valg**								
2	Stikprøvestørrelse: 1340								
3									
4	Parti	Valg (%)	Men. p (%)	p	u	u (%)	Venstre (%)	Højre (%)	
5	A	13,8	16,2						
6	B	2,9	3,4						
7	C	21,5	17,9						
8	D	7,1	7,9						
9	E	27,4	30,8						
10	F	10,6	8,5						
11	G	16,7	15,3						
12									

Opgave 14 (Meningsmåling før valg)

Ved forrige valg fik 6 partier de stemmeandele, som fremgår af søjle B på figuren nedenfor. Op til det kommende nyvalg har et meningsmålingsinstitut foretaget en meningsmåling, hvor 1420 blev spurgt om, hvad de nu ville stemme på. Det er anført i søjle C.

a) Udfyld de tomme søjler i tabellen nedenfor på samme måde, som det blev gjort i eksempel 5 (NB! Der kan arbejdes direkte videre i en vedhæftet Excel-fil).
b) Benyt det udfyldte Excel regneark til at afgøre hvilke partier, som ifølge meningsmålingen står til en signifikant fremgang eller signifikant tilbagegang.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	**Meningsmåling før kommende valg**								
2	Stikprøvestørrelse: 1420								
3									
4	Parti	Valg (%)	Men. p (%)	p	u	u (%)	Venstre (%)	Højre (%)	
5	A	41,2	38,5						
6	B	9,3	10,6						
7	C	21,5	15,2						
8	D	5,3	12,6						
9	E	8,9	10,4						
10	F	13,8	12,7						
11									

Opgave 15 (Meningsmåling før valg)

Valgresultatet fra sidste folketingsvalg fremgår af søjle B i skemaet nedenfor. Umiddelbart før et nyvalg blev 1125 personer spurgt, hvad de ville stemme på. Stemmetallene herfra er anført i søjle C.

a) Bestem i søjle D hvor mange procent, der vil stemme på hvert parti.
b) Udfyld resten af søjlerne i stil med den måde, der blev vist i eksempel 5 (NB! Der kan arbejdes direkte videre med en vedhæftet Excel-fil).
c) Benyt det udfyldte Excel regneark til at afgøre hvilke partier, som ifølge meningsmålingen står til en signifikant fremgang eller signifikant tilbagegang.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	**Meningsmåling før kommende valg**									
2	Stikprøvestørrelse: 1125									
3										
4	Parti	Valg (%)	Men. Antal	Men. p (%)	p	u	u (%)	Venstre (%)	Højre (%)	
5	A	23,1	218							
6	B	9,2	96							
7	C	3,5	47							
8	D	22,5	310							
9	E	13,2	128							
10	F	28,5	326							
11										

Opgave 16 (Den statistiske usikkerheds afhængighed af stikprøvestørrelsen)

Ifølge sætning 1 afhænger den *statistiske usikkerhed* u af både den estimerede andel p og stikprøvestørrelsen n. Den første figur nedenfor viser for $p = 40\%$ den statistiske usikkerheds afhængighed af stikprøvestørrelsen. Den anden figur viser den tilsvarende figur for tilfældet $p = 10\%$.

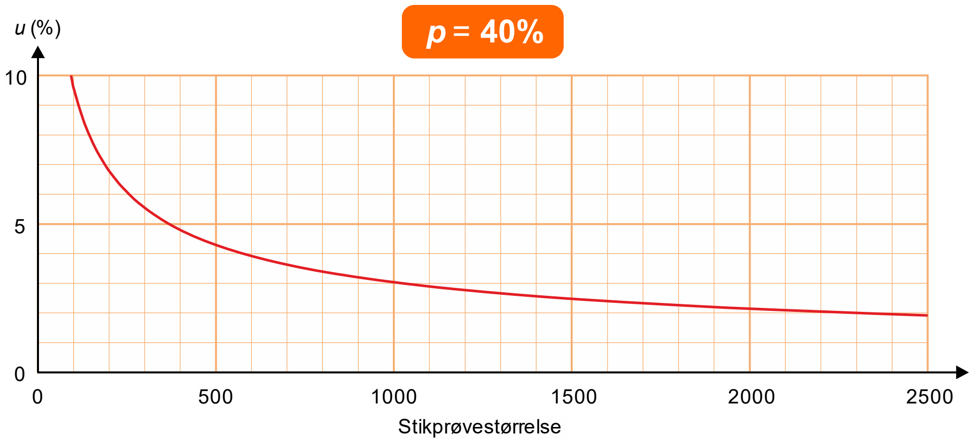
a) Lad $p = 40\%$. Hvor stor er den statistiske usikkerhed i procentpoints ved en stikprøvestørrelse på henholdsvis 300 og 2000.

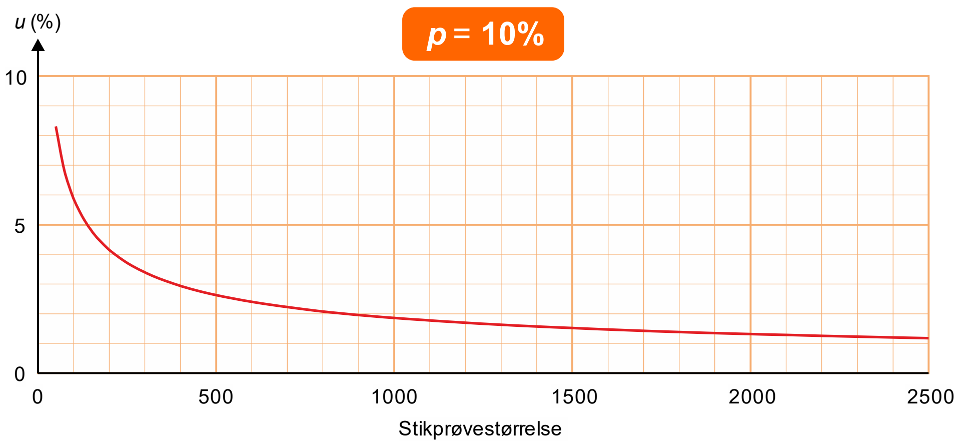
b) Sammenlign de to kurver. Hvad viser de for samme stikprøvestørrelse?

c) Benyt kurverne til at argumentere for meningsmålingsinstitutternes påstand om, at når man er nået op på 1000-1500 i stikprøvestørrelse, så er *marginalnytten* ved at øge stikprøvestørrelsen lille.

d) Prøv selv at bruge dit CAS-værktøj til at tegne grafen for den statistiske usikkerhed som funktion af stikprøvestørrelsen n – for en eller anden fastholdt estimeret andel p, for eksempel $p = 30\% = 0{,}30$. Gang med 100% for at få y-værdierne i procent. Altså tegn grafen for funktionen u som funktion af n som vist herunder:

$$u(n) = 196\% \cdot \sqrt{\frac{0{,}30 \cdot (1 - 0{,}30)}{n}}$$





Opgave 17* (Teoretisk)

Vis ud fra formlen for den statistiske usikkerhed u, at den største statistiske usikkerhed fås for partier, hvis tilslutning ifølge meningsmålingen er 50%. Det er her underforstået, at stikprøvestørrelsen er fastholdt. *Hjælp*: Formlen for den statistiske usikkerhed kan betragtes som en funktion af p. Foretag en funktionsundersøgelse af funktionen.

Links

Altinget om meningsmålinger:
https://www.altinget.dk/artikel/guide-find-rundt-i-meningsmaalingerne
Meningsmålinger Bibliotek og undervisning):
https://faktalink.dk/meningsmalinger