Produktreglen for differentiation

Vi har tidligere set, at hvis to funktioner *f* og *g* er differentiable i et punkt x_0, så er *summen* af funktionerne også differentiabel i x_0, og differentialkvotienten kan fås ved at differentiere de to funktioner hver for sig og lægge resultaterne sammen. Sagt med matematik: $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$. Vi fik også set, at en konstant *k* gange *f* er differentiabel i x_0 og at differentialkvotienten fås ved løst sagt "at sætte konstanten udenfor": $(k \cdot f)'(x_0) = k \cdot f'(x_0)$. Disse regneregler er overordentlig nyttige, for det betyder nemlig, at vi umiddelbart kan differentiere en masse nye funktioner, uden at skulle til at gå tilbage til definitionen for differentiabilitet, altså gribe fat i differenskvotienten, reducere udtrykket og undersøge for grænseværdier, når $\Delta x \to 0$. Vi kan altså umiddelbart spare en masse tid. Det næste nærliggende spørgsmål, der trænger sig på, er om *produktet* $f \cdot g$ er differentiabel i x_0, og om man i så fald kan differentiere produktfunktionen ved at differentiere funktionerne hver for sig og gange resultaterne sammen til sidst, altså om følgende gælder: $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g'(x_0)$? Svaret er her NEJ!! Det er desværre lidt mere kompliceret, men dog stadig til at have med at gøre.

Sætning 1

Antag at funktionerne *f* og *g* er differentiable i punktet x_0. Da er produktfunktionen $f \cdot g$ differentiabel i x_0 og differentialkvotienten fås således:

(1) $$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$$

Bevis: For at bevise sætningen er vi nødt til at gå helt tilbage til definitionen for differentialkvotient. Lad os kalde produktfunktionen for $h(x)$, altså: $h(x) = f(x) \cdot g(x)$. Vi skal have fat i differenskvotienten for produktfunktionen. Da der er flere differenskvotienter i spil, anbringer vi indekset *h* på Δy:

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta y_h}{\Delta x} &= \frac{h(x_0+\Delta x) - h(x_0)}{\Delta x} \\
&= \frac{f(x_0+\Delta x)\cdot g(x_0+\Delta x) - f(x_0)\cdot g(x_0)}{\Delta x} \\
&= \frac{f(x_0+\Delta x)\cdot g(x_0+\Delta x) - f(x_0)\cdot g(x_0+\Delta x) + f(x_0)\cdot g(x_0+\Delta x) - f(x_0)\cdot g(x_0)}{\Delta x} \\
&= \frac{f(x_0+\Delta x)\cdot g(x_0+\Delta x) - f(x_0)\cdot g(x_0+\Delta x)}{\Delta x} + \frac{f(x_0)\cdot g(x_0+\Delta x) - f(x_0)\cdot g(x_0)}{\Delta x} \\
&= \frac{\big(f(x_0+\Delta x) - f(x_0)\big)\cdot g(x_0+\Delta x)}{\Delta x} + \frac{f(x_0)\cdot\big(g(x_0+\Delta x) - g(x_0)\big)}{\Delta x} \\
&= \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}\cdot g(x_0+\Delta x) \; + \; f(x_0)\cdot\frac{g(x_0+\Delta x) - g(x_0)}{\Delta x} \\
&= \frac{\Delta y_f}{\Delta x}\cdot g(x_0+\Delta x) \; + \; f(x_0)\cdot\frac{\Delta y_g}{\Delta x}
\end{aligned}$$

Forklaringer: 3. lighedstegn: Vi har benyttet et trick, idet vi har indskudt to led i midten i tælleren. Vi har trukket $f(x_0)\cdot g(x_0+\Delta x)$ fra og lagt leddet til igen. Dermed er der ikke sket noget reelt. 4. lighedstegn: Vi har opdelt brøken i to dele. 5. lighedstegn: I tælleren i første brøk kan $g(x_0+\Delta x)$ sættes uden for parentes, da den er en fælles faktor. Tilsvarende kan $f(x_0)$ sættes udenfor parentes i tælleren i det andet led. 7. lighedstegn: Vi kan nu se meningen med tricket højere oppe. Vi opdager at første brøk netop er differenskvotienten for funktionen *f*, og at den anden brøk er differenskvotienten for funktionen *g*.

Vi har nu fået et udtryk for differenskvotienten for produktfunktionen *h* og reduceret den så meget vi kan. Sidste trin i raketten er at afgøre, om udtrykket har en grænseværdi for $\Delta x \to 0$ og, hvis grænseværdien eksisterer, bestemme den. I sætningen er antaget, at *f* og *g* begge er differentiable i x_0. Pr. definition betyder det, at så har differenskvotienterne for *f* og *g* hver en grænseværdi for $\Delta x \to 0$, og grænseværdierne er henholdsvis $f'(x_0)$ og $g'(x_0)$. Sagt med matematik har vi $\Delta y_f / \Delta x \to f'(x_0)$ og $\Delta y_g / \Delta x \to g'(x_0)$ for $\Delta x \to 0$. Vi mangler stadig at kigge på to led: $f(x_0)$ er fast og ændrer sig ikke, når $\Delta x \to 0$. Det fjerde led: Da *g* er differentiabel i x_0, er *g* også kontinuert i x_0 ifølge en sætning. Derfor har vi $g(x_0+\Delta x) \to g(x_0)$ for $\Delta x \to 0$. Alt i alt får vi ifølge reglerne for grænseværdier:

$$
\begin{aligned}
\frac{\Delta y_h}{\Delta x} &= \frac{\Delta y_f}{\Delta x}\cdot g(x_0+\Delta x) + f(x_0)\cdot\frac{\Delta y_g}{\Delta x} \\
&\to f'(x_0)\cdot g(x_0) + f(x_0)\cdot g'(x_0) \quad \text{for } \Delta x \to 0
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Differenskvotienten for *h* har altså en grænseværdi. Derfor er produktfunktionen *h* differentiabel i x_0, og differentialkvotienten er lig med ovenstående grænseværdi, altså:

$$h'(x_0) = f'(x_0)\cdot g(x_0) + f(x_0)\cdot g'(x_0)$$

eller $(f\cdot g)'(x_0) = f'(x_0)\cdot g(x_0) + f(x_0)\cdot g'(x_0)$. Det ønskede er dermed vist.

□

Bemærkning 2

Læg mærke til symmetrien i formlen. Det gør den nemmere at huske. I det første led på højre side differentierer man den første funktion og lader den anden funktion stå. I det andet led lader man den første funktion stå og differentierer den anden funktion!

Eksempel 3

Lad $f(x) = x^2$ og $g(x) = \sin(x)$. Bestem differentialkvotienten for produktfunktionen $h(x) = x^2\cdot\sin(x)$. Ifølge sætning 1 har vi:

$$h'(x) = (x^2\cdot\sin(x))' = (x^2)'\cdot\sin(x) + x^2\cdot(\sin(x))' = 2x\cdot\sin(x) + x^2\cdot\cos(x)$$