Annuitetsregning

I dette tillæg skal vi kigge på emnet *annuitetsregning*. Vi skal udlede en formel for *annuitetsopsparing* og en formel for *annuitetslån*. I modsætning til situationen, som beskrives ved den velkendte renteformel, så indbetales der ikke blot et beløb én gang, men flere gange. Annuitetslån findes mange steder i den virkelige verden. Vi ser på de to tilfælde:

Annuitetsopsparing

Et beløb b indbetales hver termin og i alt n gange, startende straks. Hver gang, der er gået en termin, tilskrives et rentebeløb. Renten pr. termin er givet ved r. Samtidigt med den sidste indbetaling, som er n–1 terminer senere, står der på kontoen beløbet A, som er givet ved følgende formel, som bevises senere:

$$(1) \quad A = b \cdot \left(\frac{(1+r)^n - 1}{r} \right)$$

Det kan være en god idé at lave et regneark, hvor man stiller størrelserne op i kolonner, for at se, hvad der sker termin for termin. I eksemplet nedenfor er 1 termin et år. Der foretages $n = 7$ indbetalinger á $b = 2000$ kr. Den årlige rente er $r = 6{,}5\% = 0{,}065$. Det kan være fornuftigt ovenfor det egentlige skema at definere de faste størrelser r og b, så man nedenfor kan referere til dem.

Rente	*r*	0,065	
Indbetaling	*b*	2000	
Termin (år)	**Indbetaling**	**Rentebeløb**	**saldo**
0	2000		2000
1	2000	130	4130
2	2000	268	6398
3	2000	416	8814
4	2000	573	11387
5	2000	740	14127
6	2000	918	17046

I linjen med 1. termin beregnes størrelserne således:

Indbetaling: Tages fra det faste blå felt højere oppe. Husk dollartegn, så feltet ikke ændres ved nedkopiering: `=$C$2`

Rentebeløb: Gang saldoen fra forrige linje med den faste rente ovenfra: `=$C$1*D5`

Saldo: Læg saldoen fra forrige linje sammen med indbetalingen og rentebeløbet fra den aktuelle linje sammen: `=D5+B6+C6`

Herefter kan linjen ud for 1. termin markeres og nedkopieres …

Annuitetslån

Der optages et lån, hvis størrelse kaldes *hovedstolen* G. Lånet tilbagebetales ved, at man efter hver af i alt n terminer betaler en fast ydelse y. Renten pr. termin er r. Ydelsen, som får gælden til at gå i 0 efter n'te indbetaling, er givet ved formel (2), som bevises senere:

$$(2) \quad y = G \cdot \left(\frac{r}{1-(1+r)^{-n}} \right)$$

Restgælden går dog desværre ikke ned med et beløb svarende til ydelsen, for der skrives også renter til for hver gang, der er gået en termin. Den egentlige nedgang i gælden kaldes *afdraget* og kan derfor bestemmes således:

(3) Afdrag = ydelse – rentebeløb

Tiden fra lånet optages til det er tilbagebetalt kaldes lånets *løbetid*.

Ligesom i tilfældet med opsparingsannuitet, kan det være fornuftigt at stille størrelserne op i et regneark, som vist med et eksempel herunder. Det kaldes også en *amortiseringstabel*. Øverst i de blå felter defineres de faste størrelser $r = 0{,}20$, $n = 6$ og $G = 25000$. Ved hjælpe af disse størrelser beregnes ydelsen y i det gule felt ved hjælp af formel (2).

Rente	*r*	0,20		
Antal terminer	*n*	6		
Hovedstol	*G*	25000		
Ydelse	*y*	7518		
Termin (år)	**Ydelse**	**Rentebeløb**	**Afdrag**	**Restgæld**
0				25000
1	7518	5000	2518	22482
2	7518	4496	3021	19461
3	7518	3892	3625	15836
4	7518	3167	4350	11485
5	7518	2297	5221	6265
6	7518	1253	6265	0

I linjen med 1. termin beregnes størrelserne således:

Ydelse: Tages fra det faste gule felt højere oppe. Husk dollartegn, så feltet ikke ændres ved nedkopiering: `=$C$4`

Rentebeløb: Gang restgælden fra forrige linje med den faste rente ovenfra: `=$C$1*E7`

Afdrag: Benyt formel (3) ovenfor: `=B8-C8`

Restgæld: Afdraget fra den aktuelle linje trækkes fra restgælden fra forrige linje: `=E7-D8`

Herefter kan linjen ud for 1. termin markeres og nedkopieres …

Beløb tilbagebetalt

Man kan også spørge sig selv om, hvor meget man kommer til at tilbagebetale i alt for at kunne låne de 25000 kr. Svaret er summen af alle ydelserne, som her giver:

(1) $$n \cdot y = 6 \cdot 7517{,}64 = 45106$$

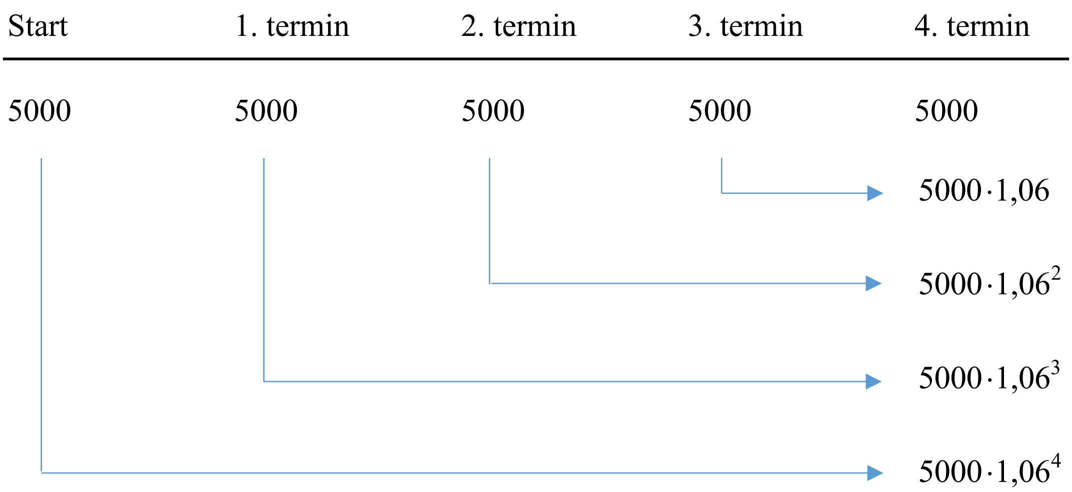
hvor vi i mellemregninger har benyttet flere cifre. Dermed kommer man altså til at betale i alt 45106 kr. for at kunne låne 25000 kr.

Beviser

I det følgende gives bevis for de to annuitetsformler (1) og (2) tidligere.

Opsparingsannuitet

Først vises pointen i beviset ved et eksempel, hvor der indbetales 5000 kr. 5 gange og hvor renten er 6% pr. termin. Vi ser, at hver af de indbetalte beløb står på kontoen i forskellige perioder. Renteformlen $K = K_0 \cdot (1+r)^n$ benyttes til at udregne, hvor meget hver indbetaling bliver til alt efter, hvor mange terminer de står og trækker renter. Det ser vi på figuren ude til højre.



Til sidst gælder det blot om at lægge disse beløb ude til højre sammen for at få det samlede opsparede beløb, betegnet med A.

(2) $$A = 5000 + 5000 \cdot 1{,}06 + 5000 \cdot 1{,}06^2 + 5000 \cdot 1{,}06^3 + 5000 \cdot 1{,}06^4 = 28185$$

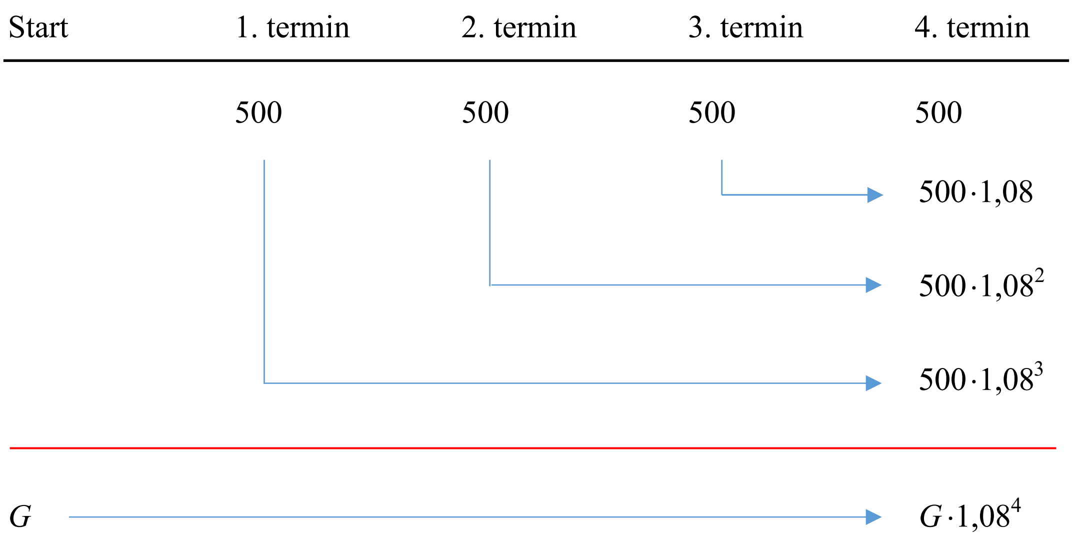
Nu sætter vi bogstaver på. Indbetalingen på de 5000 kr. svarer til størrelsen b, fremskrivningsfaktoren 1,06 svarer til $1+r$ og det samlede antal indbetalinger, som er 5, svarer til n. Udtrykket (2) svarer med andre ord til det mere generelle:

(3) $$\begin{aligned} A &= b + b \cdot (1+r) + b \cdot (1+r)^2 + \ldots + b \cdot (1+r)^{n-1} \\ &= b \cdot \left(1 + (1+r) + (1+r)^2 + \ldots + (1+r)^{n-1}\right) \\ &= b \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r} \end{aligned}$$

hvor b er sat uden for parentes i linje 2 og vi i linje 3 har brugt resultatet i appendiks A.

Annuitetslån

Igen ser vi på pointen i beviset for formlen for annuitetslån via et taleksempel. Vi antager, at ydelsen er 500 kr. og at den indbetales 4 gange. Renten antages at være 8% pr. termin. Idéen er nu at *fremskrive* alt til sidste termin. Den sidste ydelse, der indbetales i samme øjeblik som den sidste termin indtræffer, er 500 kr. værd. Ydelsen indbetalt 1 termin tidligere er derimod $500 \cdot 1{,}08$ værd, ydelsen indbetalt 2 terminer tidligere er $500 \cdot 1{,}08^2$ værd, ydelsen indbetalt 3 terminer tidligere er $500 \cdot 1{,}08^3$ værd, etc.



Hvis alt skal passe, skal summen af de beløb, som ydelserne er værd efter sidste termin, være lig med værdien af lånets hovedstol efter sidste termin:

$$G \cdot 1{,}08^4 = 500 + 500 \cdot 1{,}08 + 500 \cdot 1{,}08^2 + 500 \cdot 1{,}08^3$$

Vi går nu tilbage til det generelle tilfælde med bogstaver. Vi kan opstille følgende ligning, som helt svarer til taleksemplet, og derefter reducere:

$$G \cdot (1+r)^n = y + y \cdot (1+r) + y \cdot (1+r)^2 + \ldots + y \cdot (1+r)^{n-1}$$

$$\Updownarrow$$

$$G \cdot (1+r)^n = y \cdot \left(1 + (1+r) + (1+r)^2 + \ldots + (1+r)^{n-1}\right)$$

$$\Updownarrow$$

$$G \cdot (1+r)^n = y \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

$$\Updownarrow$$

$$G = y \cdot (1+r)^{-n} \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

$$\Updownarrow$$

$$G = y \cdot \frac{1-(1+r)^{-n}}{r}$$

$$\Updownarrow$$

$$G \cdot \frac{r}{1-(1+r)^{-n}} = y$$

1. ensbetydende: y sættes udenfor parentes på højre side af lighedstegnet. 2. ensbetydende: Vi benytter (A4) fra appendiks A. 3. ensbetydende: Vi ganger med $(1+r)^{-n}$ på begge sider af lighedstegnet. 4. ensbetydende: De almindelige potensregler er benyttet. 5. ensbetydende: Brøken på højre side i linje 5 divideres der med på begge sider af lighedstegnet – eller hvad der er det samme: der ganges med den omvendte brøk!

□

Appendiks A

Vi skal se, hvordan vi kan udregne summen af en såkaldt endelig kvotientrække. Med en *kvotientrække* menes en sum, hvor man får det næste led i rækken ud fra det forrige ved at gange med en bestemt konstant. I rækken $s_n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n$ ganges for eksempel med x fra led til led. Det kan være, at vi fandt på at gange rækken med x:

(A1) $$x \cdot s_n \;=\; x \cdot (1 + x + x^2 + \ldots + x^n) \;=\; x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + x^{n+1}$$

og derefter trække de to rækker fra hinanden:

(A2)
$$\begin{aligned}
x \cdot s_n - s_n \;&=\; \left(x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + x^{n+1}\right) - \left(1 + x + x^2 + \ldots + x^n\right) \\
&\Updownarrow \\
s_n \cdot (x-1) \;&=\; x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + x^{n+1} - 1 - x - x^2 - \ldots - x^n \\
&\Updownarrow \\
s_n \cdot (x-1) \;&=\; x^{n+1} - 1 \\
&\Updownarrow \\
s_n \;&=\; \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}
\end{aligned}$$

1. ensbetydende: På venstre side er s_n sat uden for parentes, og på højre side har vi hævet henholdsvis en plus-parentes og en minus-parentes. 2. ensbetydende: Vi ser, at på højre side af lighedstegnet går alle led ud undtagen to. 3. ensbetydende: Vi dividerer med $x-1$ på begge sider med lighedstegnet. Dermed har vi en kompakt formel:

(A3) $$1 + x + x^2 + \ldots + x^n \;=\; \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$$

Bruges formlen med n udskiftet med n–1 og med $x = 1 + r$ fås:

(A4) $$1 \;+\; (1+r) \;+\; (1+r)^2 \;+\; \ldots \;+\; (1+r)^{n-1} \;=\; \frac{(1+r)^n - 1}{(1+r) - 1} \;=\; \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

hvilket vi havde brug for i beviset for formlen for opsparingsannuitet.

□

Opgaver

Opgave 1 (Opsparingsannuitet)

Gurli sparer hvert år 3000 kr. sammen. I alt 8 indbetalinger over 7 år. Beløbet indsættes på en konto, hvor der loves en årlig rente på 7%.

a) Bestem, hvor stort et beløb hun har stående efter den sidste indbetaling er foretaget 7 år senere.
b) Lav i Excel et regneark, som viser saldoens udvikling år for år, ligesom vist med et eksempel på side 1.

Opgave 2 (Annuitetslån)

Dan køber en racercykel til 15000 kr. på afbetaling. Hver måned – begyndende efter første måned – skal han indbetale en fast ydelse, indtil lånet er betalt ud efter 12 måneder. Den månedlige rente er 1,35%.

a) Benyt formel (2) til at bestemme ydelsens størrelse.
b) Lav i Excel en amortiseringstabel i samme stil som eksemplet side 3.
c) Hvad sker der med afdragenes størrelse som tiden går? Hvorfor det sker det?
d) Bestem hvilken årlig rente den månedlige rente svarer til (tænk på sammenhængen mellem fremskrivningsfaktorer for forskellige perioder).
e) Hvor meget når Dan alt i alt at betale for cyklen?

Opgave 3

Henning vil spare op til et surfbræt, som koster 6.400 kr. Hver måned kan han fra sin løn afse 300 kr. til at sætte til side. Dette beløb indsætter han hver måned på en bankkonto til 1,0% i månedlig rente. Hvor mange måneder varer det før Henning har nok på kontoen til at gå ned og købe surfbrættet?

Opgave 4

Et firma ønsker at tilbyde en afdragsordning på køb af en gummiged, hvis kontantpris er 450.000 kr. Firmaet ønsker en årlig rente på 35%.

a) Hvad svarer det til i månedlig rente? (angiv med 2 decimalers nøjagtighed)

Firmaet ønsker desuden at løbetiden på ordningen skal være 48 måneder.

b) Hvor meget skal firmaet så forlange i månedlig ydelse?

Opgave 5

Hjalte har købt et surround sound-system til 18000 kr., og valgt at afbetale med månedlige ydelser på 750 kr. Den månedlige rente er 2,77%. Hvor mange måneder tager det, før anlægget er betalt af?

Opgave 6

Familien Andersen overvejer at købe en Weber-Grill med prisskiltet 4999 kr. på afbetaling i form af 24 månedlige rater af 275 kr.

a) Hvor stor er den månedlige rente?
b) Hvad svarer det til i årlig rente?
c) Hvor meget kommer familien til i alt at betale for apparatet, før gælden er væk?

Opgave 7

Anne har hvert år foretaget en indbetalt af et bestemt beløb på en konto til en årlig rente på 9,5%. Efter 7 år (8 indbetalinger) står der 7300 kr. på kontoen.

a) Hvor meget indbetalte Anne på kontoen hver termin?