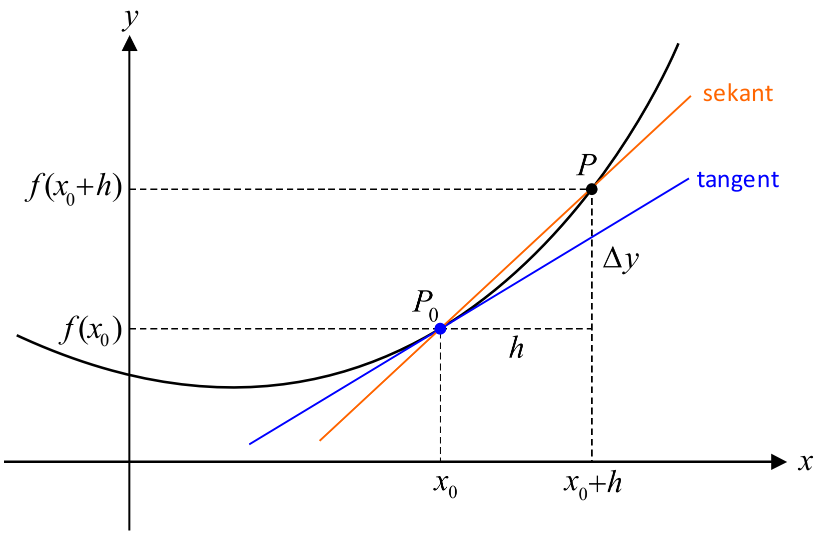
Begrebet differentialkvotient

På figuren nedenfor har vi givet et fast punkt P_0 med koordinater $(x_0, f(x_0))$ og et bevægeligt punkt P med koordinater $(x_0+h, f(x_0+h))$ på grafen for en funktion *f*. Det "bevægelige" ligger i, at vi snart vil variere tilvæksten *h*. Den orange linje igennem de to punkter kaldes for en *sekant*, og den har en *hældning*, som vi kan udregne via en velkendt formel fra 1g:

(1) $$a = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{(x_0+h)-x_0} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Så hældningen af den orange sekant er lig med forskellen eller *tilvæksten* i *y*-værdi, Δy, divideret med forskellen eller *tilvæksten* i *x*-værdi, altså *h*. Brøken i (1) vil vi også betegne *differenskvotienten*.



Definition 1

Med *differenskvotienten* for funktionen *f* i punktet x_0 menes brøken

(2) $$\frac{\Delta y}{h} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Hvis vi lader *h* nærme sig til 0, vil det bevægelige grafpunkt $P(x_0+h, f(x_0+h))$ bevæge sig ned ad grafen mod det faste punkt $P_0(x_0, f(x_0))$. For hver ny værdi af *h* fås en ny sekanthældning. Lidt løst sagt: Hvis denne række af sekanthældninger nærmer sig til et tal a_0, når *h* nærmer sig til 0, så siger vi, at *f* er differentiabel i x_0 med *differentialkvotient* lig med grænseværdien a_0. Vi skriver desuden $f'(x_0) = a_0$, hvor venstresiden udtales "*f* mærke af *x* nul". Mere formelt kan det defineres, som vist i definition 2 på næste side.

Vi vil desuden definere *tangenten* til grafen for *f* i punktet P_0 til at være den blå linje, som har hældning a_0 og som går igennem punktet P_0, jf. definition 3 på næste side.

Definition 2

En funktion *f* siges at være *differentiabel* i punktet x_0, hvis differenskvotienten for *f* i x_0 har en grænseværdi for $h \to 0$. I så fald kaldes grænseværdien for *differentialkvotienten* for *f* i x_0, og den betegnes med $f'(x_0)$:

(3) $$f'(x_0) = \lim_{h \to 0}\left(\frac{\Delta y}{h}\right)$$

Hvis *f* er differentiabel i ethvert punkt af sin definitionsmængde, siges *f* at være *differentiabel* – uden angivelse af et punkt.

Definition 3

Antag at funktionen *f* er differentiabel i x_0. Da vil vi sige, at grafen for *f* har en *tangent* i $P_0(x_0, f(x_0))$, som defineres som den linje, der går igennem punktet P_0 og som har hældningen $f'(x_0)$.

Bemærkning 4

Differentialkvotienten kaldes også ofte for *den afledede*. Udover $f'(x_0)$ ser man undertiden også følgende betegnelse for differentialkvotienten:

$$\frac{df}{dx}$$

Det var den betegnelse, som tyskeren *Gottfried Wilhelm Leibniz* (1646-1716) benyttede, da han udviklede differentialregningen sideløbende og uafhængigt af englænderen *Isaac Newton* (1643-1727). Man skal dog passe på ikke at opfatte det som en brøk mellem to størrelser! Det skal opfattes som en helhed.

□

I arbejdet med at bestemme differentialkvotienter skal vi gøre brug af en fremgangsmåde, som kan betegnes *tretrinsreglen*.

Tretrinsreglen

1. Opskriv udtrykket for differenskvotienten $\dfrac{\Delta y}{h} = \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.
2. Reducér udtrykket for differenskvotienten fra punkt 1 passende.
3. Afgør om det reducerede udtryk for differenskvotienten har en grænseværdi for $h \to 0$. Hvis grænseværdien eksisterer, sættes den lig med $f'(x_0)$.

Sætning 5

Funktionen $f(x) = ax^2$, hvor a er en konstant, er differentiabel i ethvert punkt $x_0 \in R$, og differentialkvotienten er givet ved $f'(x_0) = 2ax_0$.

Bevis: Vi bruger tretrinsreglen fra forrige side:

1. Differenskvotienten: $\dfrac{\Delta y}{h} = \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \dfrac{a\cdot(x_0+h)^2 - a\cdot x_0^2}{h}$

2. Reduktion:

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{h} &= \frac{a\cdot(x_0+h)^2 - a\cdot x_0^2}{h}\\ &= \frac{a\cdot(x_0^2+h^2+2\cdot x_0\cdot h) - a\cdot x_0^2}{h}\\ &= \frac{a\cdot x_0^2 + a\cdot h^2 + a\cdot 2\cdot x_0\cdot h - a\cdot x_0^2}{h}\\ &= \frac{a\cdot h^2 + a\cdot 2\cdot x_0\cdot h}{h}\\ &= \frac{h\cdot\left(a\cdot h + a\cdot 2\cdot x_0\right)}{h}\\ &= a\cdot h + 2\cdot a\cdot x_0\end{aligned}$$

   2. lighedstegn: Vi har benyttet en kvadratsætning. 5. lighedstegn: h er sat uden for parentes (faktorisering). 6. lighedstegn: h *forkortes* væk i tæller og nævner.

3. Grænseværdi:

$$\frac{\Delta y}{h} = a\cdot h + 2\cdot a\cdot x_0 \;\to\; a\cdot 0 + 2\cdot a\cdot x_0 = 2\cdot a\cdot x_0 \quad \text{for} \quad h \to 0\,.$$

   Da grænseværdien eksisterer, konkluderer vi, at f er differentiabel i x_0, og at differentialkvotienten i x_0 er lig med $f'(x_0) = 2ax_0$.

Det ønskede er dermed vist.

□

Bemærkning 6

Det bemærkes, at h sagtens kan være negativ. Det betyder blot, at det bevægelige punkt ligger på venstre side af det faste punkt. For at en funktion kan siges at være differentiabel i x_0, så skal differenskvotienten have den samme grænseværdi, hvad enten h nærmer sig til 0 fra højre eller fra venstre!