Differentiation af x^2

Sætning 1

Funktionen $f(x)=x^2$ er differentiabel i ethvert punkt $x_0 \in R$, og differentialkvotienten er givet ved $f'(x_0)=2x_0$.

Bevis: Vi bruger tretrinsreglen:

1. Differenskvotienten: $\dfrac{\Delta y}{h} = \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \dfrac{(x_0+h)^2-x_0^2}{h}$

2. Reduktion:

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta y}{h} &= \frac{(x_0+h)^2-x_0^2}{h} \\
&= \frac{(x_0^2+h^2+2\cdot x_0\cdot h)-x_0^2}{h} \\
&= \frac{x_0^2+h^2+2\cdot x_0\cdot h-x_0^2}{h} \\
&= \frac{h^2+2\cdot x_0\cdot h}{h} \\
&= \frac{h\cdot(h+2\cdot x_0)}{h} \\
&= h+2\cdot x_0
\end{aligned}$$

   2. lighedstegn: Vi har benyttet en kvadratsætning. 5. lighedstegn: h er sat uden for parentes (faktorisering). 6. lighedstegn: h forkortes væk i tæller og nævner.

3. Grænseværdi:

$$\frac{\Delta y}{h} = h+2\cdot x_0 \;\to\; 0+2\cdot x_0 = 2\cdot x_0 \quad \text{for} \quad h\to 0\,.$$

   Da grænseværdien eksisterer, konkluderer vi, at f er differentiabel i x_0, og at differentialkvotienten i x_0 er lig med grænseværdien, altså: $f'(x_0)=2ax_0$.

Det ønskede er dermed vist.

□

Kvadratsætninger

$$\begin{aligned}
(a+b)^2 &= a^2+b^2+2\cdot a\cdot b \\
(a-b)^2 &= a^2+b^2-2\cdot a\cdot b \\
(a+b)\cdot a-b) &= a^2-b^2
\end{aligned}$$