Regneregler for differentiation

I starten udregner man differentialkvotienterne for nogle få funktioner ved at gå helt tilbage og bruge *tretrinsreglen*, hvor man først opskriver *differenskvotienten*, dernæst reducerer den så meget som muligt, for til sidst at undersøge, om den har en grænseværdi for $h \to 0$. Har den det, siger vi, at funktionen er *differentiabel* i punktet x_0 med *differentialkvotient* lige med den pågældende grænseværdi. Skulle man bruge denne metode for alle funktioner, ville det være et møjsommeligt arbejde. Heldigvis eksisterer der regneregler for differentiation af summer, differenser, produkter og kvotienter, så man sparer en masse tid. I dette tillæg skal vi kigge på disse regneregler.

Sætning 1

Lad f og g være to funktioner, som er differentiable i x_0, og lad k være en konstant. Da er funktionerne $f+g$, $f-g$ samt $k \cdot f$ differentiable i x_0 med følgende differentialkvotienter:

a) $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$

b) $(f-g)'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0)$

c) $(k \cdot f)'(x_0) = k \cdot f'(x_0)$

Bevis: Vi nøjes med at bevise a). Beviset for de to øvrige overlades til læseren. For simpelheds skyld kalder vi sumfunktionen for s :

$$s(x) = (f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

Ifølge tretrinsreglen skal vi gribe fat i differenskvotienten for sumfunktionen s. Eftersom der kommer flere differenskvotienter i spil i beviset, anbringer vi et indeks på funktionstilvæksten for at fortælle, hvilken funktion, den hører til. Vi omskriver:

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta y_s}{h} &= \frac{s(x_0+h)-s(x_0)}{h} \\
&= \frac{(f+g)(x_0+h)-(f+g)(x_0)}{h} \\
&= \frac{\big(f(x_0+h)+g(x_0+h)\big)-\big(f(x_0)+g(x_0)\big)}{h} \\
&= \frac{f(x_0+h)-f(x_0)+g(x_0+h)-g(x_0)}{h} \\
&= \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} + \frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h} \\
&= \frac{\Delta y_f}{h} + \frac{\Delta y_g}{h}
\end{aligned} \tag{1}$$

I linje 4 har vi hævet parenteserne i tælleren og byttet lidt rundt på rækkefølgen af leddene. I linje 5 er der blevet sat på hver sin brøkstreg. I linje 6 registrerer vi, at vi i linje 5 faktisk har summen af differenskvotienterne for henholdsvis f og g. Det er faktisk hele idéen i beviset, nemlig at omskrive differenskvotienten for den funktion, vi *ikke* ved noget om – nemlig sumfunktionen s – til et udtryk, som vi ved noget om. Men hvad ved vi om differenskvotienterne for f og g? Jo vi ved, at f og g er differentiable i x_0. Det står som antagelse i sætningen. Dermed har deres differenskvotienter en grænseværdi, nemlig henholdsvis $f'(x_0)$ og $g'(x_0)$ for $h \to 0$:

(2) $$\frac{\Delta y_s}{h} = \frac{\Delta y_f}{h} + \frac{\Delta y_g}{h} \to f'(x_0) + g'(x_0) \quad \text{for } \Delta x \to 0$$

Eftersom differenskvotienten for s har en grænseværdi for $h \to 0$, er sumfunktionen s differentiabel i x_0 og differentialkvotienten for s er lig denne grænseværdi, altså:

(3) $$s'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

hvormed a) er bevist.

□

Eksempel 2

Med sætning 1 er vi pludseligt blevet i stand til at differentiere et væld af nye funktioner. Regel a) siger, at "differentialkvotienten af en sum er lig med summen af differentialkvotienterne". Regel b) siger det tilsvarende om en differens, mens regel c) godtgør, at vi "kan sætte multiplikative konstanter udenfor":

$$\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)' = \left(x^2\right)' + \left(\frac{1}{x}\right)' = 2x + \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2x - \frac{1}{x^2}$$
$$\left(x - 5\right)' = \left(x\right)' - \left(5\right)' = 1 - 0 = 1$$
$$\left(5 \cdot x^2\right)' = 5 \cdot \left(x^2\right)' = 5 \cdot 2x = 10x$$

□

Det næste spørgsmål, der kan trænge sig på, er, om differentialkvotienten af et produkt er produktet af differentialkvotienterne? Det viser sig *ikke* at være tilfældet. Men der gælder alligevel en smuk sætning:

Sætning 3 (Produktreglen for differentiation)

Lad f og g være to funktioner, som er differentiable i x_0. Da er produktfunktionen $f \cdot g$ differentiabel i x_0 med differentialkvotienten givet ved

(4) $$\left(f \cdot g\right)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$$

Bevis: Den overordnede idé i beviset er den samme som i beviset for sætning 1a), blot er det mere teknisk kompliceret her. Vi lader p repræsentere produktfunktionen:

$$p(x) = (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

Vi regner på differenskvotienten for produktfunktionen p :

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta y_p}{h} &= \frac{p(x_0+h)-p(x_0)}{h} \\
&= \frac{(f\cdot g)(x_0+h)-(f\cdot g)(x_0)}{h} \\
&= \frac{f(x_0+h)\cdot g(x_0+h)-f(x_0)\cdot g(x_0)}{h} \\
&= \frac{f(x_0+h)\cdot g(x_0+h) - f(x_0)\cdot g(x_0+h) + f(x_0)\cdot g(x_0+h) - f(x_0)\cdot g(x_0)}{h} \\
&= \frac{f(x_0+h)\cdot g(x) - f(x_0)\cdot g(x_0+h)}{h} + \frac{f(x_0)\cdot g(x_0+h)-f(x_0)\cdot g(x_0)}{h} \\
&= \frac{\big(f(x_0+h)-f(x_0)\big)\cdot g(x_0+h)}{h} + \frac{f(x_0)\cdot\big(g(x_0+h)-g(x_0)\big)}{h} \\
&= \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\cdot g(x_0+h) \; + \; f(x_0)\cdot\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h} \\
&= \frac{\Delta y_f}{h}\cdot g(x_0+h) \; + \; f(x_0)\cdot\frac{\Delta y_g}{h}
\end{aligned}$$

I linje 4 er et ekstra led (markeret med rødt) både trukket fra og lagt til, hvilket ikke ændrer på noget. I linje 5 er der sat på hver sin brøkstreg. I linje 6 er en fælles faktor i tælleren sat udenfor parentes – i begge brøker. I linje 7 er den fælles faktor sat helt ned bagved eller foran brøken. Derved genkender vi i linje 8 differenskvotienterne for *f* og *g*.

Eftersom både *f* og *g* er antaget differentiable i x_0, så ved vi, at differenskvotienterne har en grænseværdi for $h \to 0$. Da g er differentiabel i x_0, er funktionen også *kontinuert* i punktet. Der gælder med andre ord: $g(x_0+h) \to g(x_0)$ for $h \to 0$. I det andet led er $f(x_0)$ bare en konstant! Alt i alt konkluderer vi, at det sidste udtryk i udregningerne ovenfor virkelig har en grænseværdi for $h \to 0$:

(5)
$$\begin{aligned}
\frac{\Delta y_h}{h} &= \frac{\Delta y_f}{h}\cdot g(x_0+h) \; + \; f(x_0)\cdot\frac{\Delta y_g}{h} \\
&\to \; f'(x_0)\cdot g(x_0) + f(x_0)\cdot g'(x_0) \quad \text{for } h \to 0
\end{aligned}$$

Vi konkluderer, at produktet af funktionerne *f* og *g* er differentiabel i x_0 med den angivne differentialkvotient.

□

Beviset ovenfor er vigtigt, fordi det illustrerer vigtigheden af at være præcis. Resultatet er uventet – man kan ikke altid forlade sig på sin umiddelbare intuition. Produktreglen kan udtrykkes noget i retningen af følgende: "Man differentierer et produkt ved at differentiere den første funktion, lade den anden stå plus lade den første funktion stå og differentiere den anden". Vi skal snart se eksempler på, hvor brugbar denne regel er. Først vil vi dog uden bevis anføre en tilsvarende regel for, hvordan man differentierer en kvotient.

Sætning 4 (Kvotientreglen for differentiation)

Lad f og g være to funktioner, som er differentiable i x_0. Antag desuden at $g(x_0) \neq 0$. Da er produktfunktionen f/g differentiabel i x_0 med differentialkvotienten givet ved

(6) $$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)\cdot g(x_0) - f(x_0)\cdot g'(x_0)}{\left(g(x_0)\right)^2}$$

Bevis: Overspringes.

□

Eksempel 5

Med produktreglen og kvotientreglen er vi blevet i stand til at differentiere en lang række af nye funktioner. Lad os for eksempel se på forskellige positive potenser af x. Vi ved fra tidligere, at $(x)' = 1$ og at $(x^2)' = 2x$. Vi kan bruge produktreglen for differentiation i sætning 3 til at bestemme differentialkvotienten for x^3, idet vi kan skrive funktionen som produktet $x \cdot x^2$:

(7) $$(x^3)' = (x\cdot x^2)' = (x)'\cdot x^2 + x\cdot(x^2)' = 1\cdot x^2 + x\cdot 2x = x^2 + 2x^2 = 3x^2$$

Derfra kan vi gå videre:

(8) $$(x^4)' = (x\cdot x^3)' = (x)'\cdot x^3 + x\cdot(x^3)' = 1\cdot x^3 + x\cdot 3x^2 = x^3 + 3x^3 = 4x^2$$

Sådan kunne vi fortsætte. Ja man kan endda gøre det for hele, *negative* potenser af x. Vi skal dog stoppe her og nøjes med at formulere resultaterne i den vigtige sætning nedenfor.

□

Sætning 6

For ethvert $n \in Z$ er funktionen $f(x) = x^n$ differentiabel, og differentialkvotienten er givet ved $f'(x) = n\cdot x^{n-1}$.

Bevis: Vi nøjes med indikationerne på sætningens rigtighed i eksempel 5 ovenfor.

□

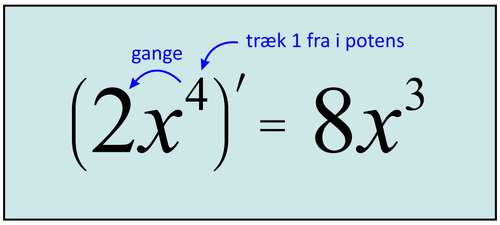
Sætning 6 er uhyre vigtig, og vi vil komme til at bruge den meget fremover. Faktisk gælder sætningen også for ikke-heltallige værdier af n, dvs. den gælder for generelle potensfunktioner, men det vil vi ikke komme ind på i dette tillæg. Hvorfor er den vigtig? Jo det er fordi *polynomier* spiller en stor rolle i matematik, og et polynomiums "bestanddele" er netop faktorer på formen x^n. Vi skal se nærmere på det i næste eksempel.

Eksempel 7

Vi ønsker at differentiere $f(x) = 2x^4$. Konstantreglen fra sætning 1c) siger, at vi kan sætte konstanten 2 "udenfor", og så ellers bare differentiere x^4 ved hjælp af sætning 6:

(9) $$(2 \cdot x^4)' = 2 \cdot (x^4)' = 2 \cdot 4x^{4-1} = 8x^3$$

Konstantreglen er benyttet til første lighedstegn. Effekten af det, der er sket kan illustreres således:



Har vi derimod et polynomium med flere led, som i nedenstående tilfælde, så bruger vi desuden sumreglen og differensreglen fra sætning 1a) og 1b):

(10) $$\begin{aligned} (2x^4 + x^3 - 3x^2 + 3x + 5)' &= (2x^4)' + (x^3)' - (3x^2)' + (3x)' + (5)' \\ &= 8x^3 + 3x^2 - 6x + 3 + 0 \\ &= 8x^3 + 3x^2 - 6x + 3 \end{aligned}$$

Normalt vil vi faktisk skrive resultatet uden mellemregninger, fordi processen forekommer så nærliggende. Differentierer vi et polynomium, får vi altså altid et nyt polynomium med en grad, som er én mindre.

□

Eksempel 8

Lad os se på et par eksempler mere:

$$\begin{aligned} (10x^3 - 2x^2 + 11x + 6)' &= 30x^2 - 4x^4 + 11 \\ (-3x^5 + 8x^4 - 7x^2 - 5)' &= -15x^4 + 32x^3 - 14x \end{aligned}$$

Men sætning 6 kan også bruges i tilfældet med negative eksponenter og 0:

$$\begin{aligned} (x^{-2} + 5x^{-1} - 14 + 2x^2)' &= -2x^{-1} - 5x^{-2} - 0 + 4x \\ &= -2x^{-1} - 5x^{-2} + 4x \end{aligned}$$

□

Eksempel 9 (Et gensyn med andengradspolynomier)

Med differentialregningen som redskab, kan vi nu nemt på en alternativ måde bevise den toppunktsformel for en parabel, som du sikkert allerede kender. For et generelt andengradspolynomium $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c,\ a \neq 0$ har vi $f'(x) = 2ax + b$. I parablens toppunkt gælder er der vandret tangent, dvs. $f'(x) = 0$. Vi løser derfor ligningen:

(11) $$f'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; 2ax + b = 0 \quad f'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; 2ax + b = 0 \;\Leftrightarrow\; x = \frac{-b}{2a}$$

For at bestemme y-koordinaten til toppunktet, indsættes x-værdien i forskriften:

$$\begin{aligned} f(x) &= a\cdot x^2+b\cdot x+c \;=\; a\cdot\left(-\frac{b}{2a}\right)^2+b\cdot\left(-\frac{b}{2a}\right)+c \\ &= a\cdot\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{2a}+c \;=\; \frac{b}{4a}-\frac{2b^2}{4a}+\frac{4ac}{4a} \\ &= \frac{-b^2+4ac}{4a} = \frac{-(b^2-4ac)}{4a} = -\frac{d}{4a} \end{aligned} \tag{12}$$

Vi overlader detaljerne til læseren.

Vi skal bevise endnu en egenskab for et andengradspolynomium, hvis graf jo er en parabel. Det viser sig, at b kan fås som tangenthældningen i $(0,c)$. Det er ret nemt at eftervise:

$$f'(0) = 2a\cdot 0+b = b \tag{13}$$

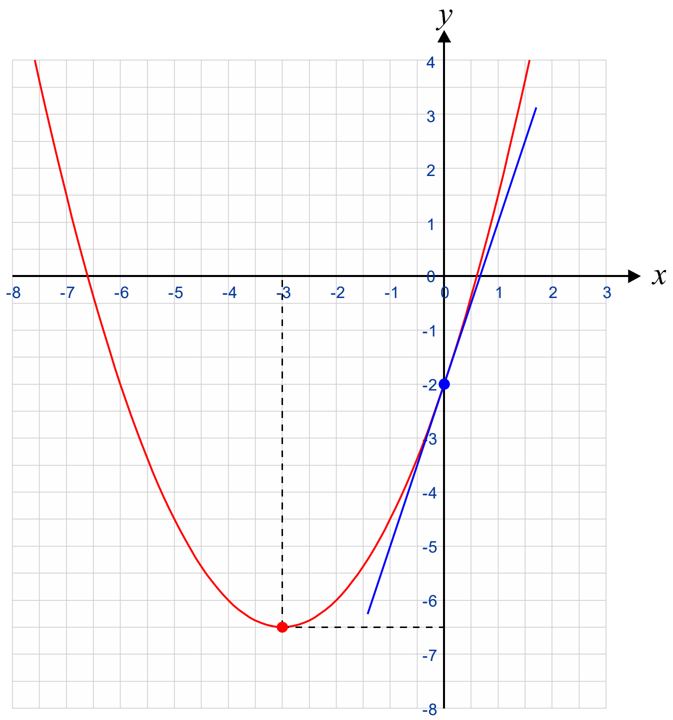
Hvorved det ønskede er vist.

Lad os betragte eksemplet $f(x)=0{,}5x^2+3x-2$. Det giver følgende diskriminant:

$$d = b^2-4ac = 3^2-4\cdot 0{,}5\cdot(-2) = 9+4 = 13$$

Toppunkt: $\left(-\dfrac{b}{2a},-\dfrac{d}{4a}\right) = \left(-\dfrac{3}{2\cdot 0{,}5},-\dfrac{13}{4\cdot 0{,}5}\right) = (-3;-6{,}5)$

Grafen er tegnet nedenfor, og vi ser, at det stemmer at tangenten til grafen i skæringspunktet $(0,-2)$ med y-aksen er lig med 3.



Vi mangler endnu en differentiationsregel, nemlig den for sammensatte funktioner. Der gælder følgende:

Sætning 10 (Differentiation af sammensat funktion)

Antag at funktionen g er differentiabel i x_0, og funktionen f er differentiabel i punktet $y_0 = g(x_0)$. Da er den sammensatte funktion $f \circ g$ differentiabel i x_0 med følgende differentialkvotient:

(14) $$\left(f \circ g\right)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

Bevis: Beviset er kompliceret, så vi udelader det.

□

Reglen kan sprogligt udtrykkes noget i retningen af følgende: "Man differentierer en sammensat funktion ved at differentiere den ydre funktion, sætte den indre funktion ind og gange med den indre funktion differentieret":

$$\left(f \circ g\right)'(x_0) = \overbrace{f'(g(x_0))}^{\text{ydre funktion differentieret med indre funktion indsat}} \cdot \overbrace{g'(x_0)}^{\text{indre funktion differentieret}}$$

Der er en hel del situationer, hvor denne regel er nødvendig for at kunne differentiere en given funktion. Vi skal se på nogle eksempler på brug af reglen.

Eksempel 11

Givet funktionen $h(x) = \sqrt{x^2+1}$. Bestem differentialkvotienten.

Vi kan betragte denne funktion som værende sammensat af den *ydre* funktion $f(y) = \sqrt{y}$ og den *indre* funktion $g(x) = x^2+1$. Man kan opskrive følgende:

Ydre: $f(y) = \sqrt{y}\ ,\quad f'(y) = \dfrac{1}{2\cdot\sqrt{y}}$

Indre: $g(x) = x^2+1\ ,\quad g'(x) = 2x$

Heraf fås:

$$h'(x) = \left(f \circ g\right)'(x) = f'(g(x))\cdot g'(x) = \frac{1}{2\cdot\sqrt{x^2+1}}\cdot 2x = \frac{2x}{2\cdot\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

□

Bemærkning 12

I eksempel 11 har vi benævnt variablen i den ydre funktion med *y*. Dette er udelukkende af pædagogiske årsager. Man kunne således sagtens have kaldt den variable for *x*:

$$f(x)=\sqrt{x}\,,\quad f'(x)=\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}$$

Men ved at kalde den *y*, kan man bedre forstå, at man indsætter $y=g(x)=x^2+1$.

□

Eksempel 13

Lad $h(x)=(4x-5)^3$. Vi ønsker at differentiere funktionen.

Vi kan betragte *h* som en sammensat funktion af den ydre funktion $f(y)=y^3$ og den indre funktion $g(x)=4x-5$.

Ydre: $f(y)=y^3\,,\quad f'(y)=3y^2$
Indre: $g(x)=4x-5\,,\quad g'(x)=4$

Heraf fås:

$$h'(x) \;=\; \left(f\circ g\right)'(x) \;=\; f'(g(x))\cdot g'(x) \;=\; 3\cdot\left(4x-5\right)^2$$

I dette tilfælde kunne man have startet med at have ganget parenteserne i udtrykket for $h(x)$ ud, og efterfølgende have differentieret funktionen som et polynomium ifølge sætning 6. Det ville imidlertid have givet et meget stort arbejde. Så derfor er det meget smartere her at bruge reglen for differentiation af sammensat funktion.

□