Eksponentielle funktioner

- udvalgte beviser

Vi starter med at postulere de vigtige potensregler:

Potensregler

Potensreglerne grupperer sig på den måde, at de første tre regler har fast grundtal mens eksponenten varierer. De næste to har forskellige grundtal, men samme eksponent. De sidste fire er specielle.

(P1) $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$	(P4) $(a \cdot b)^r = a^r \cdot b^r$
(P2) $\dfrac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$	(P5) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^r = \dfrac{a^r}{b^r}$
(P3) $(a^r)^s = a^{r \cdot s}$	

(P6) $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ (P7) $a^{-1} = \dfrac{1}{a}$ (P8) $a^0 = 1$ (P9) $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$

Definition 1

En eksponentiel funktion *f* er en funktion på formen $f(x) = b \cdot a^x$, hvor *a* og *b* er positive reelle konstanter, mens *x* er den uafhængige variabel, som kan antage enhver værdi i mængden af reelle tal.

Sætning 2

Lad *f* være en eksponentiel funktion $f(x) = b \cdot a^x$. Da gælder:

a) Grafen skærer *y*-aksen i punktet $(0, b)$.
b) Når *x* vokser med 1, *fremskrives* (ganges) *y* med *a*.
c) Når *x* vokser med Δx, fremskrives (ganges) *y* med $a^{\Delta x}$.
d) Funktionen er *voksende*, når $a > 1$, *aftagende* når $0 < a < 1$ og *konstant*, når $a = 1$.

Bevis:

a) Alle punkter på *y*-aksen har *x*-koordinaten 0. Derfor indsætter vi 0 i forskriften:

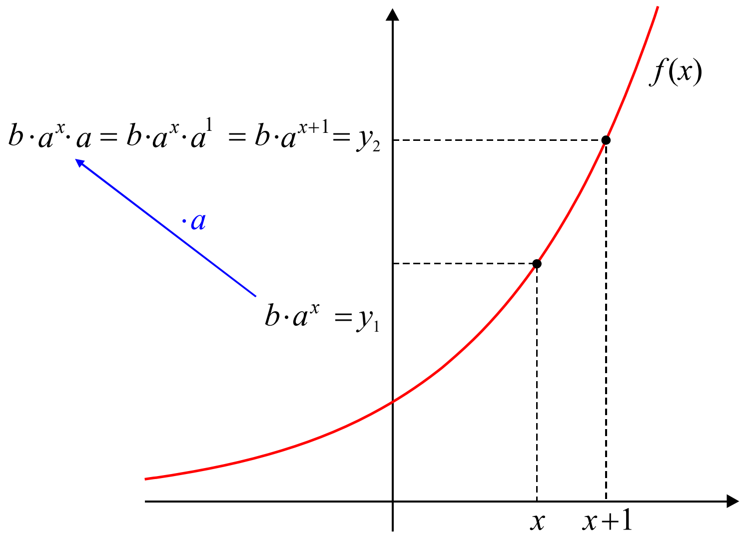
(1) $$f(0) = b \cdot a^0 = b \cdot 1 = b$$

hvor potensregel (P8) er anvendt. Vi konkluderer, at grafen skærer *y*-aksen i *b*.

b) Når man indsætter *x* i forskriften, får man naturligvis $f(x) = b \cdot a^x$. Indsætter man derimod $x+1$ i forskriften, fås følgende:

(2) $$f(x+1) = b \cdot a^{x+1} = b \cdot a^x \cdot a^1 = (b \cdot a^x) \cdot a = f(x) \cdot a$$

hvor vi har benyttet potensregel (P1). Vi konkluderer, at den nye y-værdi er a gange så stor som den oprindelige! Sagt på en anden måde, så vil en *x-tilvækst* på 1 betyde, at y fremskrives (ganges) med a.



c) Vi benytter samme idé som i b). Nu lægger vi blot Δx til x:

(3) $$f(x+\Delta x) \;=\; b \cdot a^{x+\Delta x} \;=\; b \cdot a^x \cdot a^{\Delta x} \;=\; (b \cdot a^x) \cdot a^{\Delta x} \;=\; f(x) \cdot a^{\Delta x}$$

igen ved brug af potensregel (P1). Det viser det ønskede.

d) Undlader vi at bevise.

□

Definition 3

For en eksponentiel funktion $f(x) = b \cdot a^x$ defineres *vækstraten* r ved:

(4) $$r = a - 1 \quad \Leftrightarrow \quad a = 1 + r$$

Sætning 4 (Procentvis vækst)

Eksponentielle funktioner har den egenskab, at lige store ændringer i x giver lige store procentvise ændringer i y.

Hvor stor den procentvise ændring i y er, kan beskrives ved en vækstrate (”rente”), som omsættes til procent ved at gange med 100%.

Hvis x øges med 1: $\quad a = 1 + r \quad \Leftrightarrow \quad r = a - 1$
Hvis x øges med Δx : $\quad 1 + r_y = a^{\Delta x} \quad \Leftrightarrow \quad r_y = a^{\Delta x} - 1$

hvor a er fremskrivningsfaktoren, r er vækstraten pr. enhed i x og r_y er er den samlede relative vækst over intervallet Δx .

Vi skal ikke bevise denne sætning, kun illustrere den ved tre eksempler.

Eksempel 1:

Antag $f(x) = 5 \cdot 1{,}20^x$.

Vi ved fra sætning 1, at når x øges med 1, så fremskrives (ganges) y med a. I dette tilfælde er $a = 1{,}20$, så y fremskrives med 1,20. At gange med 1,20 svarer som bekendt til at lægge 20% til. Rent formelt bør vi dog bruge formlen i sætning 4:

$$r \;=\; a - 1 \;=\; 1{,}20 - 1 \;=\; 0{,}20 \;=\; 0{,}20 \cdot 100\% \;=\; 20\%$$

Dermed øges y altså med 20%. Hvad sker der, hvis vi i stedet øger x med 2? Ifølge sætning 4 fås den samlede relative vækst ved den mere generelle formel:

$$r_y \;=\; a^{\Delta x} - 1 \;=\; 1{,}20^2 - 1 \;=\; 1{,}44 - 1 \;=\; 0{,}44 \;=\; 0{,}44 \cdot 100\% \;=\; 44\%$$

y-værdien bliver altså øget med 44%, når x øges med 2.

Man kunne tro, at når man øger x med det dobbelte, så skal man også øge y med den dobbelte procent, men det er forkert! Der kommer nemlig renters rente til! Den rigtige metode er derfor altid at gå via fremskrivningsfaktoren. Man kan også sige, at vi ganger med 1,20 to gange, hvilket svarer til at gange med gange med $1{,}20^2 = 1{,}44$, som netop giver en relativ vækst på 44%.

Eksempel 2:

Antag $f(x) = 5 \cdot 0{,}90^x$.

Når x øges med 1, har vi altså følgende "rente" i y:

$$r \;=\; a - 1 \;=\; 0{,}90 - 1 \;=\; -0{,}10 \;=\; -0{,}10 \cdot 100\% \;=\; -10\%$$

Det viser, at y *aftager* med 10%, når x øges med 1.

Eksempel 3:

Renteformlen $K_n = K_0 \cdot (1+r)^n$ er i virkeligheden blot en eksponentiel udvikling, hvor fremskrivningsfaktoren $a = (1+r)$, begyndelsesværdien er $b = K_0$ og eksponenten n spiller rollen af Δx. Den eneste forskel er, at n i renteformlen normalt kun antager heltallige værdier (antal terminer), mens Δx i en eksponentiel funktion kan være vilkårlig reel.

Sætning 5

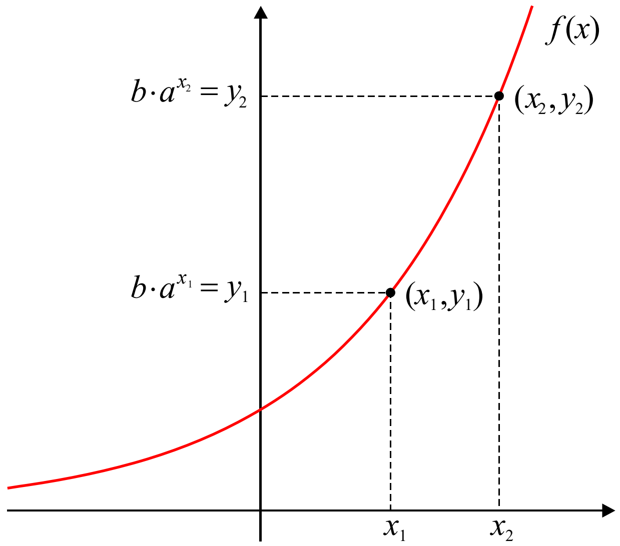
Lad (x_1, y_1) og (x_2, y_2) være to punkter på grafen for en eksponentiel funktion med forskrift $f(x) = b \cdot a^x$. Parametrene a og b kan da bestemmes af følgende formler:

(5) $$a \;=\; \sqrt[x_2 - x_1]{\frac{y_2}{y_1}} \quad , \quad b = \frac{y_1}{a^{x_1}}$$

Bevis: Da punkterne ligger på grafen, haves $y_1 = b \cdot a^{x_1}$ og $y_2 = b \cdot a^{x_2}$. Her kan man tænke på x_1, x_2, y_1 og y_2 som værende kendte. Derimod er a og b ukendte. Man ser snedigt, at man kan skaffe sig af med den ene ubekendte, b, ved at dividere de to y-værdier:

(6) $$\frac{y_2}{y_1} = \frac{b\cdot a^{x_2}}{b\cdot a^{x_1}} = \frac{a^{x_2}}{a^{x_1}} = a^{x_2-x_1} \quad\Leftrightarrow\quad \sqrt[x_2-x_1]{\frac{y_2}{y_1}} = a$$

hvor vi blandt andet har brugt potensregel (P2). For at isolere a tages den (x_2-x_1)'te rod på begge sider.



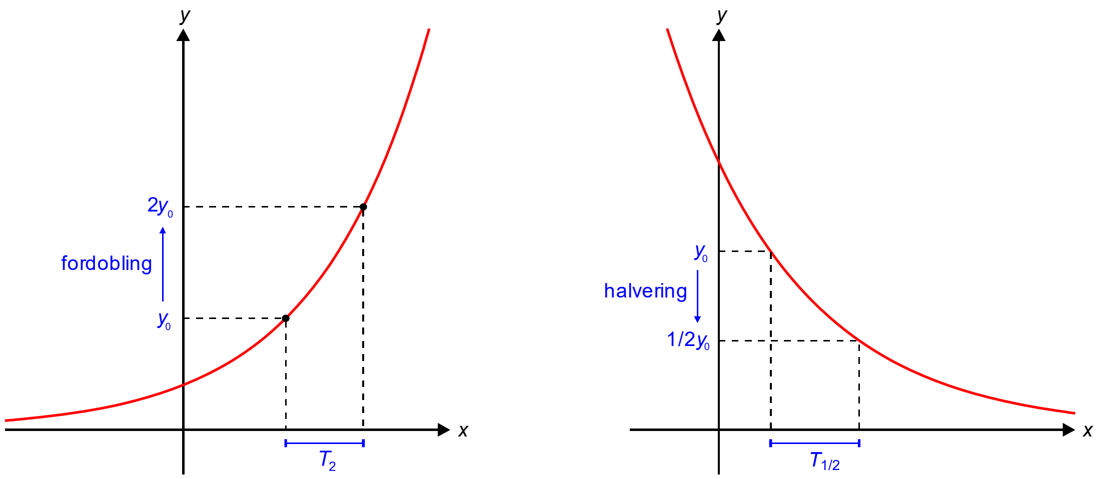
Formlen for b fås nemt ved at isolere b i ligningen $y_1 = b\cdot a^{x_1}$. Man dividerer blot med a^{x_1} på begge sider af lighedstegnet.

□

Definition 6 (Fordoblings og halveringskonstanter)

En *voksende* eksponentiel funktion har en såkaldt *fordoblingskonstant* T_2, som er det x skal øges med for at y fordobles.

En *aftagende* eksponentiel funktion har en såkaldt *halveringskonstant* $T_{1/2}$, som er det x skal øges med for at y halveres.

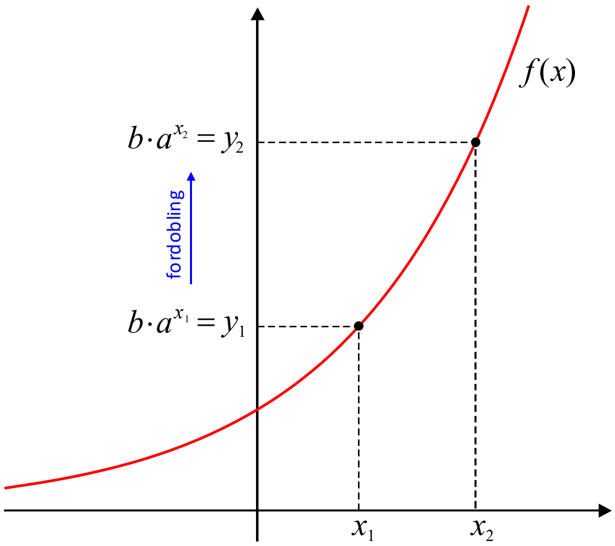


Sætning 7 (Fordoblingskonstant)

For en voksende eksponentiel funktion $f(x) = b \cdot a^x$ (dvs. $a > 1$) kan fordoblingskonstanten bestemmes ved brug af følgende formel:

(7) $$T_2 = \frac{\log(2)}{\log(a)}$$

Bevis: Vi vælger to y-værdier, y_1 og y_2, hvor y_2 er dobbelt så stor som y_1. De tilhørende x-værdier betegner vi henholdsvis x_1 og x_2.



Vi får den gode idé at dividere de to y-værdier med hinanden. Det får nemlig konstantleddet b til at gå ud, samtidigt med, at vi kan udnytte, at den ene y-værdi er dobbelt så stor som den anden:

(8) $$2 = \frac{y_2}{y_1} = \frac{b \cdot a^{x_2}}{b \cdot a^{x_1}} = \frac{a^{x_2}}{a^{x_1}} = a^{x_2 - x_1}$$

hvor potensregel (P2) er anvendt i sidste lighedstegn.Vi skal nu lade, som om vi kender a, men ikke $x_2 - x_1$. Sidstnævnte er faktisk fordoblingskonstanten, som vi skal bestemme, altså $T_2 = x_2 - x_1$. Vi får af (8):

(9) $$a^{T_2} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \log\left(a^{T_2}\right) = \log(2) \quad \Leftrightarrow \quad T_2 \cdot \log(a) = \log(2) \quad \Leftrightarrow \quad T_2 = \frac{\log(2)}{\log(a)}$$

Første skridt: logaritmen tages på begge sider af lighedstegnet. Andet skridt: Logaritmeregel (L3) er anvendt. Sidste skridt: Der divideres med $\log(a)$ på begge sider af lighedstegnet. Det ønskede er dermed vist.

□

NB! For at kunne bevise sætning 7 er det nødvendigt at kende til logaritmeregnereglerne. De er angivet og bevist på næste side.

Definition 8 (Titalslogaritmen)

Titalslogaritmen $\log(x)$ $(x>0)$ er defineret som den inverse funktion til 10^x. Hermed menes, at de kan udligne hinandens virkning:

(10) $\quad \log(10^x) = x \quad$ for $x \in R$

(11) $\quad 10^{\log(x)} = x \quad$ for $x \in R^+$

Sætning 9 (Logaritmeregneregler)

Om logaritmefunktionen gælder følgende regler:

(L1) $\log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b) \quad$ for $a,b \in R_+$

(L2) $\log(a/b) = \log(a) - \log(b) \quad$ for $a,b \in R_+$

(L3) $\log(a^x) = x \cdot \log(a) \quad$ for $a \in R_+$, $x \in R$

Bevis: Lad os udlede den første logaritmeregel, (L1):

(12) $$\log(a \cdot b) \;=\; \log\left(10^{\log(a)} \cdot 10^{\log(b)}\right) \;=\; \log\left(10^{\log(a)+\log(b)}\right) \;=\; \log(a)+\log(b)$$

hvor vi i første lighedstegn har udnyttet, at a og b kan skrives som henholdsvis $10^{\log(a)}$ og $10^{\log(b)}$ ifølge (11). Andet lighedstegn fås ved at benytte potensregel (P1). Endelig fås tredje lighedstegn ved at udnytte (10), dvs. at 10^x og log ophæver hinandens virkning. Logaritmeregel (L2) bevises på helt analog vis. Lad os slutte af med at bevise logaritmeregel (L3):

(13) $$\log(a^x) \;=\; \log\left(\left(10^{\log(a)}\right)^x\right) \;=\; \log\left(10^{x \cdot \log(a)}\right) \;=\; x \cdot \log(a)$$

hvor vi i første lighedstegn igen har udnyttet, at a kan skrives som $10^{\log(a)}$. For at få andet lighedstegn udnyttes potensregel (P3), og endelig fås tredje lighedstegn igen ved at benytte (10).

□