En ligning for tangenten

Vi starter med et simpelt resultat fra 1g:

Sætning 1

En linje, som går igennem punktet (x_0, y_0) og som har hældningskoefficienten *a*, kan angives ved følgende ligning:

(1) $$y = a \cdot (x - x_0) + y_0$$

Bevis: Ligningen for en linje er $y = a \cdot x + b$. Vi har allerede fået *a* oplyst, men mangler viden om *b*. Heldigvis har vi oplysningen om punktet. Da punktet ligger på linjen, har vi $y_0 = a \cdot x_0 + b \;\Leftrightarrow\; y_0 - a \cdot x_0 = b$. Dette udtryk for *b* indsætter vi i førstnævnte ligning:

$$y \;=\; a \cdot x + b \;=\; a \cdot x + (b - a \cdot x_0) \;=\; a \cdot x + b - a \cdot x_0 \;=\; a \cdot (x - x_0) + b$$

hvor vi i sidste trin har sat *a* uden for parentes (faktoriseret). Det ønskede er dermed vist.

□

Sætning 2 (En ligning for tangenten)

Lad *f* være en funktion, som er differentiabel i x_0. Grafen for *f* har da en tangent i punktet $P_0(x_0, f(x_0))$ med ligning

(2) $$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

Bevis: Vi bruger sætning 1 ovenfor. Det eneste vi skal gøre, er at indsætte det vi ved: At tangenten går gennem punktet $(x_0, f(x_0))$ og at hældningen er lig med $f'(x_0)$:

(3) $$y = a \cdot (x - x_0) + y_0 \quad \Leftrightarrow \quad y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

hvorefter det ønskede er vist. Bemærk lige, at det er *x* og *y*, som er variable i udtrykket (3), mens de øvrige størrelser blot repræsenterer konstanter!

□

Eksempel 3

Lad $f(x) = x^2 - x + 1$. Bestem en ligning for tangenten til grafen for *f* i $P(2, f(2))$.

Løsning: $f'(x) = 2x - 1$. Dermed haves $f(2) = 2^2 - 2 + 1 = 3$ og $f'(2) = 2 \cdot 2 - 1 = 3$. Det giver os følgende resultat ved brug af sætning 2:

(4) $$y \;=\; f'(2)\cdot(x-2) + f(2) \;=\; 3\cdot(x-2)+3 \;=\; 3x-6+3 \;=\; 3x-3$$

En ligning for tangenten i punktet $P(2,3)$ er altså $y = 3x - 3$.