Lineære funktioner

- udvalgte beviser

Definition 1

En lineær funktion f er en funktion på formen $f(x) = a \cdot x + b$
hvor a og b er konstanter (reelle tal), mens x er den uafhængige variabel.

Sætning 2

Lad f være en lineær funktion $f(x) = a \cdot x + b$. Da gælder:

a) Grafen for f skærer y-aksen i b.

b) Når x øges med 1, så får y *tilvæksten* a.

Bevis:

a) Alle punkter på y-aksen har $x = 0$, så den værdi indsætter vi bare i forskriften:

$$f(0) = a \cdot 0 + b = b$$

Dermed er det bevist, at grafen skærer y-aksen i b.

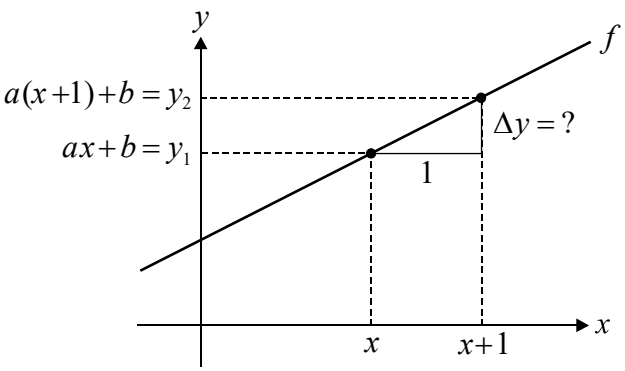
b) Vi begynder i et vilkårligt punkt x på x-aksen. Den tilhørende y-værdi fås ved at indsætte x på x's plads i forskriften:

(1) $$y_1 = f(x) = a \cdot x + b$$

Herefter øges x med 1, så vi kommer hen til $x+1$ på x-aksen. Den tilhørende y-værdi fås ved at indsætte $x+1$ på x's plads i forskriften:

(2) $$y_2 = f(x+1) = a \cdot (x+1) + b = a \cdot x + a + b$$

hvor vi har ganget ind i en parentes. Grafisk ser situationen ud som vist på figuren herunder.



Vi er interesseret i at bestemme *tilvæksten* i y, her kaldet Δy. Den får vi ved at trække de to y-værdier fra hinanden og anvende (1) og (2):

$$\begin{aligned} \Delta y &= y_2 - y_1 \\ &= (a \cdot x + a + b) - (a \cdot x + b) \\ &= a \cdot x + a + b - a \cdot x - b \\ &= a \end{aligned} \tag{3}$$

Dermed er det vist, at y får tilvæksten a.

□

Sætning 3

Lad (x_1, y_1) og (x_2, y_2) være to punkter på grafen for en lineær funktion f. Da kan a og b i $f(x) = a \cdot x + b$ bestemmes på følgende måde:

a) $a = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

b) $b = y_1 - a \cdot x_1$

Bevis:

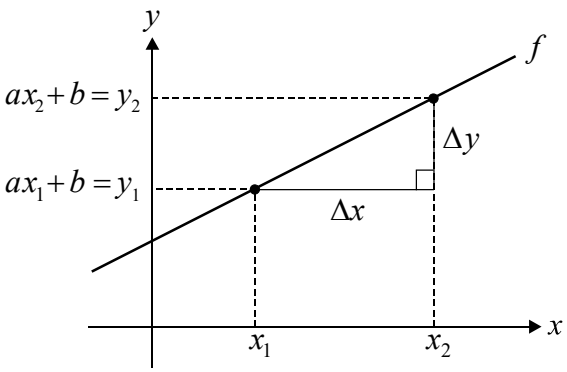
a) Da (x_1, y_1) ligger på grafen for f, så passer det med, at hvis man indsætter x_1 på x's plads i forskriften, så får vi y_1. Tilsvarende med det andet punkt:

$$\begin{aligned} y_1 &= a \cdot x_1 + b \\ y_2 &= a \cdot x_2 + b \end{aligned} \tag{4}$$

Det er da en smart idé at trække de to ligninger fra hinanden:

$$\begin{aligned} y_2 - y_1 &= (a \cdot x_2 + b) - (a \cdot x_1 + b) \\ &= a \cdot x_2 + b - a \cdot x_1 - b \\ &= a \cdot x_2 - a \cdot x_1 \\ &= a \cdot (x_2 - x_1) \end{aligned} \tag{5}$$

hvor vi har hævet plus- og minusparenteser, reduceret og faktoriseret til sidst.



Nu kan vi se, hvorfor det var smart at trække de to y-værdier fra hinanden: Hvis vi dividerer med parentesen $(x_2 - x_1)$ på begge sider i (5), så får vi det ønskede:

(6) $$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

b) Fås nemt ved at trække $a \cdot x_1$ fra på begge sider i den første ligning i (4):

$$y_1 = a \cdot x_1 + b \quad \Leftrightarrow \quad y_1 - a \cdot x_1 = b$$

Når man har beregnet a med formlen (6), får man altså nemt b herefter.

□

Opgaver

Opgave 1

Lad $f(x) = a \cdot x + b$ være en lineær funktion, hvis graf går igennem punkterne $(-2,5)$ og $(4,8)$. Benyt sætning 3 til at bestemme a og b. Som kontrol kan du herefter tegne de to punkter i et koordinatsystem og linjen igennem dem, for at se, om det ser rigtigt ud.

Opgave 2 (lidt sværere)

Sætning 2b) udtaler sig om, hvad der sker med y, når x øges med 1.

a) Hvilken tilvækst tror du y får, hvis x øges med 2?
b) Hvilken tilvækst tror du y får, hvis x øges med 10?
c) Hvilken tilvækst tror du y får, hvis x øges med et vilkårligt tal kaldet Δx?
d) Forsøg at bevise den regel, som du (forhåbentligt) kom frem til i a)
e) Prøv at bevise en generel regel for y-tilvæksten, hvis x øges med Δx.