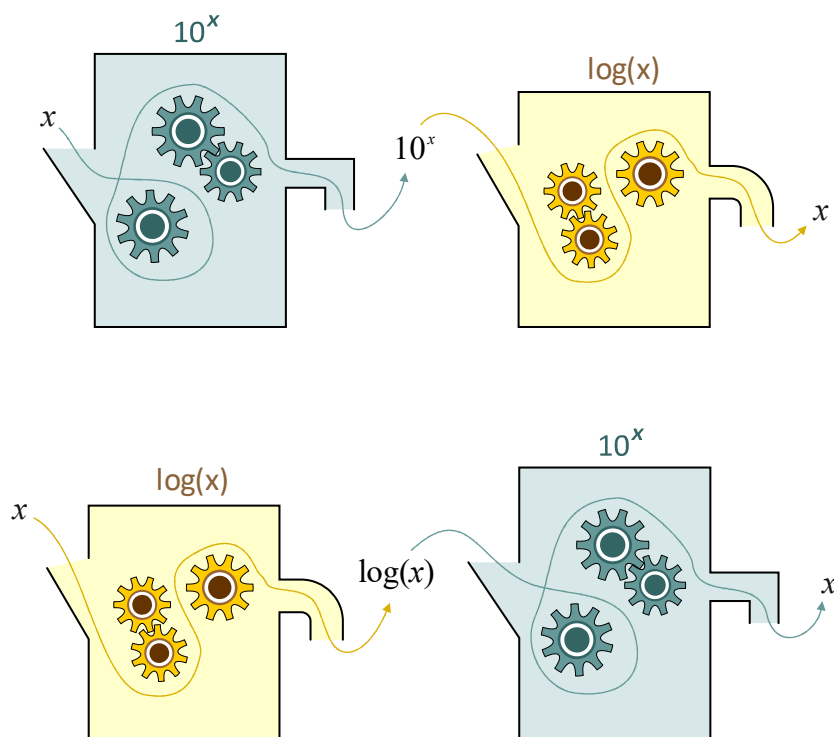


Logaritmer

Titalslogaritmen

Betragt den eksponentielle funktion 10^x med grundtal $a=10$ og $b=1$. Den har en *omvendt funktion* eller *invers funktion*, som kaldes *titalslogaritmen* og betegnes $\log(x)$. Med en omvendt eller invers funktion til en given funktion menes løst sagt en funktion, som "ophæver virkningen af den oprindelige funktion". Man kan generelt set tænke på en funktion, som en slags "maskine", som man kan fodre med et x og få et y ud. Et givet input x vil altid resultere i det samme y som output.



I den øverste del af figuren er illustreret, hvordan x fodres til maskinen repræsenterende funktionen 10^x . Outputtet er selvfølgelig 10^x og det fodres så videre til titalslogaritme-funktionen, som "spytter" x ud. Sammensætningen af de to funktioner er altså identiteten, dvs. der sker ikke noget med x . I matematisk sprog kan vi skrive det:

$$(1) \quad \log(10^x) = x \quad \text{for } x \in \mathbb{R}$$

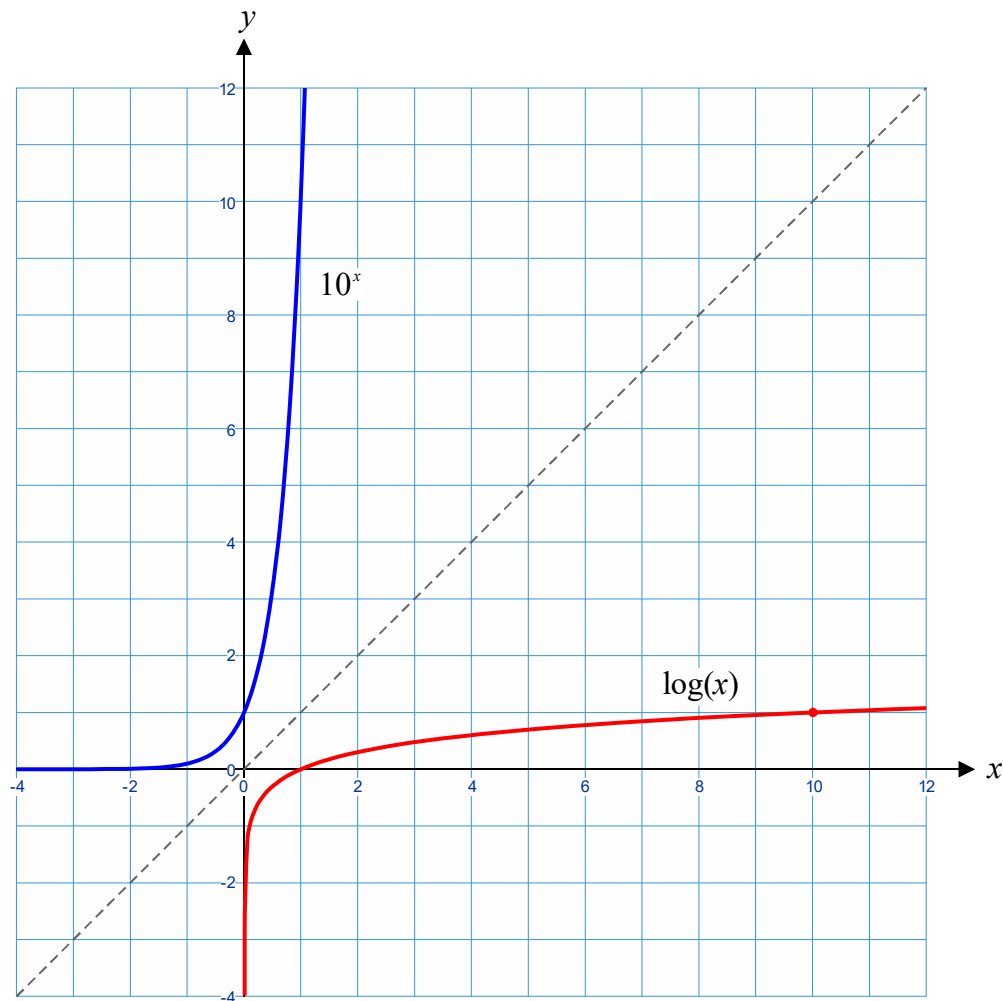
Først udregnes "indmaden" 10^x , derefter anvendes logaritme-funktionen derpå, hvorved man kommer tilbage til det, man startede med, dvs. x .

I nederste linje af figuren anvender vi funktionerne i den modsatte rækkefølge: x fodres først til logaritme-funktionen, som giver $\log(x)$ som output. Denne værdi sendes så videre til eksponential-funktionen 10^x , og man får x ud igen. Matematisk kan det skrives:

$$(2) \quad 10^{\log(x)} = x \quad \text{for } x \in \mathbb{R}^+$$

Først tages titalslogaritmen, derefter anvendes eksponential-funktionen.

På samme måde, som 10^x er den omvendte funktion til $\log(x)$, så gælder det naturligtvis også omvendt, at 10^x er en omvendt funktion til $\log(x)$. Historisk set blev logaritmerne faktisk indført først. I nogle sammenhænge betegnes 10^x derfor som *antilogaritmen*.



Ovenfor er vist graferne for 10^x og $\log(x)$. Det er ingen tilfældighed, at graferne er hinandens spejlbillede i linjen $y = x$. Det hænger sammen med, at x og y så at sige skifter rolle, da de er hinandens omvendte funktioner. Vi ser desuden, at definitionsmængden og værdimængden for titallogaritmen er henholdsvis $Dm(\log) = R^+$, altså mængden af alle positive tal, og $Vm(f) = R$, mængden af alle reelle tal. Logaritmen har nogle pæne funktionsværdier i alle x -værdier, som er hele tipotenser. For eksempel haves følgende, idet vi i andet lighedstegn benytter regel (1):

$$\log(0,01) = \log(10^{-2}) = -2$$

$$\log(0,1) = \log(10^{-1}) = -1$$

$$\log(1) = \log(10^0) = 0$$

$$\log(10) = \log(10^1) = 1$$

$$\log(100) = \log(10^2) = 2$$

Titalslogaritmefunktionen er en voksende funktion, og der gælder $f(x) \rightarrow \infty$ for $x \rightarrow \infty$. Funktionen vokser dog meget langsomt mod uendelig. Desuden gælder, at funktionsværdierne nærmer sig til minus uendelig, når x nærmer sig til 0 fra højre. Det kan skrives $f(x) \rightarrow -\infty$ for $x \rightarrow 0^+$. Dette betyder, at funktionen har det, man kalder en lodret asymptote $x = 0$. I det følgende skal vi udlede nogle vigtige regler for logaritmefunktionen. Bogstavet L i reglerne refererer til, at det er logaritmeregler. Det eneste vi i øjeblikket ved om titalslogaritmen er, at den er den omvendte funktion til 10^x . Derfor er det ikke overraskende, at vi udleder logaritmereglerne ved brug af potensreglerne fra afsnit 1 (angivet med P for Potensregler).

Sætning 1 (Logaritmeregler)

Om logaritmefunktionen gælder følgende regler:

$$(L1) \quad \log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b) \quad \text{for } a, b \in R_+$$

$$(L2) \quad \log(a/b) = \log(a) - \log(b) \quad \text{for } a, b \in R_+$$

$$(L3) \quad \log(a^x) = x \cdot \log(a) \quad \text{for } a \in R_+, x \in R$$

Bevis: Lad os udlede den første logaritmeregel, (L1):

$$(3) \quad \log(a \cdot b) = \log\left(10^{\log(a)} \cdot 10^{\log(b)}\right) = \log\left(10^{\log(a)+\log(b)}\right) = \log(a) + \log(b)$$

hvor vi i første lighedstegn har udnyttet, at a og b kan skrives som henholdsvis $10^{\log(a)}$ og $10^{\log(b)}$ ifølge (2). Andet lighedstegn fås ved at benytte potensregel (P1). Endelig fås tredje lighedstegn ved at udnytte (1), dvs. at 10^x og \log ophæver hinandens virkning. Logaritmeregel (L2) bevises på helt analog vis. Lad os slutte af med at bevise logaritmeregel (L3):

$$(4) \quad \log(a^x) = \log\left(\left(10^{\log(a)}\right)^x\right) = \log\left(10^{x \cdot \log(a)}\right) = x \cdot \log(a)$$

hvor vi i første lighedstegn har udnyttet, at a kan skrives som $10^{\log(a)}$. I andet lighedstegn udnyttes potensregel (P3), og endelig fås tredje lighedstegn igen ved at benytte (11). \square

Ved hjælp af logaritmereglerne bliver man pludseligt i stand til at løse en række nye problemstillinger. En af dem er at bestemme x , når man kender y for en eksponentiel funktion, altså at løse en ligning af formen $b \cdot a^x = y$, hvor alle størrelser undtagen x er kendte. Med CAS-værktøj er det i dag ingen sag, da man typisk anvender en *solve*-kommando. Vi skal dog give et enkelt eksempel på, hvordan man kan løse en sådan ligning *uden* brug af CAS-værktøj. Problemstillingen bliver nemlig også relevant i forbindelse med forskellige beviser.

Eksempel 2

Løs ligningen $4 \cdot 1,25^x = 7$.

Løsning:

$$4 \cdot 1,25^x = 7 \Leftrightarrow 1,25^x = \frac{7}{4} \Leftrightarrow \log(1,25^x) = \log\left(\frac{7}{4}\right) \Leftrightarrow x \cdot \log(1,25) = \log\left(\frac{7}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\log\left(\frac{7}{4}\right)}{\log(1,25)} = 2,5079$$

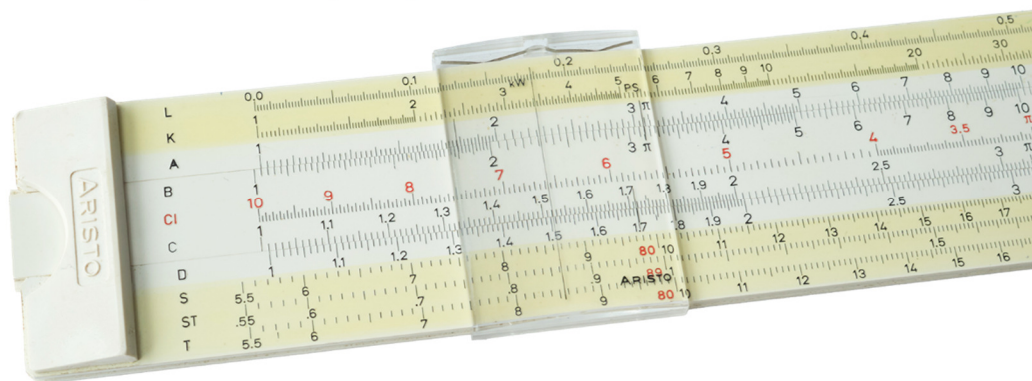
Først divideres med 4 på begge sider af lighedstegnet, så vi har en ren potens på venstre side. Fra ligning 2 til ligning 3 har vi taget logaritmen på begge sider af lighedstegnet. Fra ligning 3 til ligning 4, har vi benyttet logaritmeregel (L3). Her ser vi den store fordel: Vi får den ubekendte eksponenten x ned foran! Endelig er der fra ligning 4 til ligning 5 divideret med $\log(1,25)$ på begge sider af lighedstegnet.

□

Logaritmer har været yderst nyttige lige siden de blev indført i begyndelsen af 1600-tallet. Dengang havde man hverken lommeregnere eller computere til at hjælpe, når der skulle foretages beregninger med tal. Alt måtte udføres i hånden. Her var logaritmerne en stor fordel, især når der indgik multiplikationer, divisioner og potensopløftninger. Ved hjælp af logaritmetabeller kunne man hurtigt foretage sådanne beregninger.

Idéen er overordnet, at titalslogaritmen omdanner multiplikation til addition, division til subtraktion og potensopløftninger til multiplikation, jf. reglerne (L1), (L2) og (L3). På den måde var logaritmerne en revolution i regnekunsten i en tid, hvor videnskaben udviklede sig hastigt — ikke mindst inden for astronomi og navigation.

Siden indførelsen af lommeregnere og computere har vi ikke længere brug for logaritmer til at lette beregninger. De har dog stadig stor relevans, både teoretisk og praktisk. Logaritmer bruges ofte i områder, hvor man skal håndtere meget store eller meget små tal. I stedet for at arbejde direkte med 10-potenser kan man nøjes med at arbejde med små tal. Eksempler findes bl.a. i astronomien, hvor stjerners lysstyrke beskrives logaritmisk. Lydstyrke i decibel er også defineret via en titalslogaritme, og det samme gælder størrelsen af jordskælv samt pH-værdien i syrer og baser.



Ovenstående billede viser en såkaldt *regnestok*, hvis virkemåde bygger på Logaritmer. De blev anvendt i Danmark helt op i 1970'erne til at foretage numeriske beregninger.

Eksempel 3

I kemi har man begrebet *pH-værdi* til at beskrive, om et stof er en syre eller base. Hvis vi har at gøre med en syre, så kan vi abstrakt betegne den med symbolet HA, hvor H er hydrogen og A står for syreresten. Hvis man opløser syren i vand, opstår der en ligevægt, som kan udtrykkes ved reaktionen: $HA \rightleftharpoons H^+ + A^-$. For en stærk syre er ligevægten forskudt mod højre, mens den for en svag syre er forskudt mod venstre. Hydrogenion-koncentrationen afgør, hvor stærk en syre, der er tale om. Helt præcis definerer man pH-værdien på følgende måde:



$$(5) \quad \text{pH} = -\log[H^+]$$

hvor $[H^+]$ betegner hydrogenion-koncentrationen målt i mol/L.

- Fremstiller man en 0,05 molær opløsning af HCl (saltsyre), vil $[H^+] = 0,05$. Bestem opløsningens pH-værdi.
- Bestem hydrogenion-koncentrationen i en opløsning med en pH-værdi på 3,6.
- Som bekendt er den *neutrale* pH-værdi lig med 7, som for eksempel i rent vand. Hvor stor er hydrogenion-koncentrationen her?

Løsning:

- Vi indsætter blot i formlen:

$$\text{pH} = -\log[H^+] = -\log(0,05) = 1,3$$

Altså en pH-værdi på 1,3.

- Nu skal vi den anden vej, så vi har brug for at isolere $[H^+]$ i formlen (5). Først ganger vi med minus 1 på begge sider og derefter tager vi antilogarithmen på begge sider for at slippe af med logaritmen, dvs. bruger (2):

$$(6) \quad \text{pH} = -\log[H^+] \Leftrightarrow -\text{pH} = \log[H^+] \Leftrightarrow 10^{-\text{pH}} = [H^+]$$

Heraf fås:

$$[H^+] = 10^{-\text{pH}} = 10^{-3,6} = 0,000251$$

Altså en hydrogenion-koncentration på 0,000251 mol/L.

- Vi bruger samme formel som i b):

$$[H^+] = 10^{-\text{pH}} = 10^{-7}$$

Altså en hydrogenion-koncentration på 10^{-7} mol/L.

Den naturlige logaritme

Der findes faktisk uendeligt mange forskellige logaritme-funktioner. Forskellen er deres grundtal. Udover titalslogaritmen, som har grundtal 10, findes der logaritmer med ethvert andet positivt tal som grundtal. 2-talslogaritmen $\log_2(x)$ bruges meget i EDB-verdenen, fordi grundtallet 2 er relevant i forbindelse med det binære talsystem, som bruges der. Vi skal dog betragte en anden logaritme, som kaldes for *den naturlige logaritme* og som har grundtallet $e = 2,7182818\dots$. Den naturlige logaritme betegnes $\ln(x)$. På samme måde som $\log(x)$ er den inverse funktion til 10^x og $\log_2(x)$ er den inverse funktion til 2^x , så er $\ln(x)$ den inverse funktion til den naturlige eksponentialfunktion e^x , dvs. vi har analogt til (1) og (2):

$$(6) \quad \ln(e^x) = x \quad \text{for } x \in R$$

$$(7) \quad e^{\ln(x)} = x \quad \text{for } x \in R^+$$

Hvorfor det lidt skæve grundtal e er så ”naturligt” vil man opdage, når man kommer til emnet differentialregning. Ellers opfylder den naturlige logaritme nøjagtigt de samme regler, som titalslogaritmen opfylder i sætning 1. Derfor undlader vi at skrive dem.

De uendeligt mange logaritmer er nu ikke så forskellige – de er faktisk alle *proportionale*, dvs. for to vilkårlige logaritme-funktioner gælder det, at den ene er lig med en konstant gange den anden. Det er nemt at indse. Lad os for eksempel se på $\ln(x)$ og $\log(x)$. Vi starter med (7) og tager derefter titalslogaritmen på begge sider. Derefter bruger vi logaritmeregel (L1):

$$(8) \quad \begin{aligned} e^{\ln(x)} = x &\Leftrightarrow \log(e^{\ln(x)}) = \log(x) \Leftrightarrow \ln(x) \cdot \log(e) = \log(x) \\ \Leftrightarrow \ln(x) = \frac{\log(x)}{\log(e)} &\Leftrightarrow \ln(x) = \frac{1}{\log(e)} \cdot \log(x) \Leftrightarrow \ln(x) = 2,302585 \cdot \log(x) \end{aligned}$$

Proportionalitetskonstanten er altså (afrundet) 2,302585. At logaritmerne er proportionale, betyder for eksempel, at når man i emnet eksponentialfunktioner opgiver formelen for fordoblingskonstanten for en voksende eksponentialfunktion på formen $f(x) = b \cdot a^x$, så kan man godt skifte titalslogaritmen ud med den naturlige logaritmefunktion:

$$(9) \quad T_2 = \frac{\log(2)}{\log(a)} = \frac{\ln(2)}{\ln(a)}$$

Det skyldes selvfølgelig, at den multiplikative konstant går ud, når man dividerer. Tilsvarende er halveringskonstanten for en eksponentielt aftagende funktion:

$$(10) \quad T_{1/2} = \frac{\log(\frac{1}{2})}{\log(a)} = \frac{\ln(\frac{1}{2})}{\ln(a)}$$

Nogle gange – især i opgaver med eksponentielle modeller – vælger man at angive en eksponentiel funktion på formen $f(x) = b \cdot e^{k \cdot x}$, hvor k er en konstant. En af grundene er, at man kan lade x have en *enhed*, idet k så har den reciprokke enhed. Det kan man ikke gøre med funktioner på formen $f(x) = b \cdot a^x$. Sammenhængen mellem a og k i de to former fås ved at indse følgende: $e^{k \cdot x} = (e^k)^x = a^x$, hvis $e^k = a$.

Konstanten k kan findes ved at bruge den naturlige logaritme:

$$(11) \quad e^k = a \Leftrightarrow \ln(e^k) = \ln(a) \Leftrightarrow k = \ln(a)$$

hvor (6) er anvendt. Man kan altså med formlerne i (11) hurtigt komme frem og tilbage mellem de to former for forskrifter. I tilfældet med $f(x) = b \cdot e^{k \cdot x}$, så er formlerne for fordoblingskonstanter og halveringskonstanter følgende:

$$(12) \quad \text{Voksende eksponentiel funktion } (k > 0): \quad T_2 = \frac{\ln(2)}{k}$$

$$(13) \quad \text{Aftagende eksponentiel funktion } (k < 0): \quad T_{1/2} = \frac{\ln(\frac{1}{2})}{k}$$

Her kan man selvfølgelig *ikke* udskifte med titallogaritmen, da der kun er en logaritme i tælleren. For at udlede (12), bruger vi (9), (11) samt (6):

$$T_2 = \frac{\ln(2)}{\ln(a)} = \frac{\ln(2)}{\ln(e^k)} = \frac{\ln(2)}{k}$$

Formlen i (13) udledes på tilsvarende vis. Lad os se på nogle eksempler.

Eksempel 4

a) Omskriv $f(x) = 25 \cdot 1,50^x$ til formen $f(x) = b \cdot e^{k \cdot x}$.

b) Omskriv $f(x) = 7 \cdot e^{-0,12x}$ til formen $f(x) = b \cdot a^x$.

Løsning:

a) Vi benytter formlerne i (11):

$$k = \ln(a) = \ln(1,50) = 0,4055$$

Dermed har vi $f(x) = 25 \cdot e^{0,4055x}$.

b) Vi bruger nu den første formel i (11):

$$a = e^k = e^{-0,12} = 0,8869$$

Dermed har vi $f(x) = 7 \cdot 0,8869^x$.

Eksempel 5

Betragt følgende to funktioner: $f(x) = 100 \cdot e^{0,072x}$ og $g(x) = 5 \cdot e^{-0,15x}$.

Bestem fordoblingskonstant/halveringskonstant.

Løsning: Da $k = 0,072$ er positiv, er f voksende. Dermed har f en fordoblingskonstant:

$$T_2 = \frac{\ln(2)}{k} = \frac{\ln(2)}{0,072} = 9,63$$

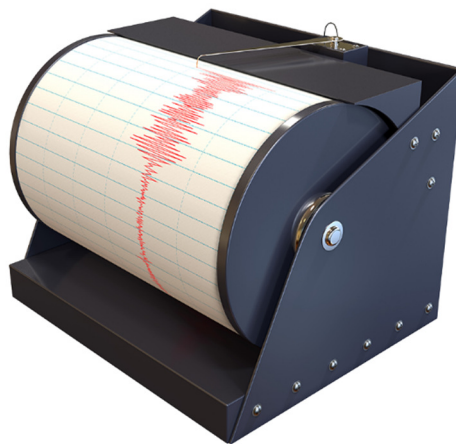
Da $k = -0,15$ er negativ, er g aftagende. Dermed har g en halveringskonstant:

$$T_{1/2} = \frac{\ln(\frac{1}{2})}{k} = \frac{\ln(\frac{1}{2})}{-0,15} = 4,62$$

Opgaver

Opgave 1 (Seismograf og Richtertal)

I 1935 indførte Charles F. Richter i samarbejde med Beno Gutenberg den berømte Richterskala til beskrivelse af størrelsen af et jordskælv. På et tidspunkt overvejede Richter at lade udslagets størrelse på en seismograf - med en passende korrektion for afstanden til jordskælvet - være et direkte mål for jordskælvets styrke. Imidlertid viste det sig, at forskellen mellem de mindste og de største jordskælv var alt for stor til at kunne håndteres på en lineær skala.



Richters samarbejdspartner Gutenberg foreslog derfor at afbilde udslagene logaritmisk. Richter var begejstret, og det viste sig hurtigt, at man nu på en hensigtsmæssig måde kunne rangere jordskælvne. Samtidig tiltalte det ham, at man i astronomien allerede brugte en logaritmisk størrelsesklasse til at beskrive stjerners lysstyrke. Ved at bruge logaritmer kunne han nemmere adskille de mange små jordskælv fra de få store, der på den tid forekom i Californien. Sammenhængen mellem den energi E , der udløses ved et jordskælv (målt i joule), og Richtertallet M viser sig at være givet ved formelen:

$$(6) \quad \log(E) = 1,5 \cdot M + 4,8$$

- I Danmark bliver jordskælvne heldigvis ikke ret store, blandt andet fordi Danmark *ikke* befinder sig på randen af nogle af pladerne, som udgør Jordens overflade. Alligevel forekommer der små jordskælv i Danmark, selv om de ofte dårlig kan mærkes. Blandt de skælv, som kan nævnes, var der blandt andet et jordskælv af styrke 4,0 på Richterskalaen, som blev registreret på Thyholm, Mors og det vestligste Salling den 4. december 1997. Bestem den energi, som blev udløst ved skælv.
- Det berømte jordskælv i San Francisco den 18. april 1906 er efterfølgende blevet vurderet til omkring 8,1 på Richter-skalaen. Hvor stor en energi blev frigjort?
- Hvor højt er et jordskælv på Richterskalen, hvis det udløser en energi på $5,2 \cdot 10^{15}$ J?
- Hvor mange gange større var den energi, som blev frigjort ved San Francisco jordskælv i 1906 sammenlignet med jordskælv i Danmark i 1997? Kan du besvare spørgsmålet udelukkende ud fra forskellen i Richtertal?

Opgave 2

Løs ligningen $6 \cdot 1,82^x = 1500$ ved hjælp af logaritmer ligesom i eksempel 2. Kontroller resultatet med *solve* på dit CAS-værktøj.

Opgave 3

Benyt formlerne i (11) til at ...

- omskrive $f(x) = 14 \cdot e^{0.35}$ til en eksponentiel funktion på formen $f(x) = b \cdot a^x$.
- omskrive $f(x) = 7,81 \cdot 2,95^x$ til en eksponentiel funktion på formen $f(x) = b \cdot e^{k \cdot x}$.
- omskrive $f(x) = e^{-0,75x}$ til en eksponentiel funktion på formen $f(x) = b \cdot a^x$.

Opgave 4

Afgør i hvert af nedenstående tilfælde, om den eksponentielle funktion er voksende eller aftagende og bestem derefter den relevante fordoblingskonstant/halveringskonstant for funktionen ved brug af (12) eller (13):

- $f(x) = 400 \cdot e^{-0,25x}$
- $f(x) = 8 \cdot e^{0,47x}$
- $f(x) = 17 \cdot e^{0,023x}$

Opgave 5

Benyt reglerne for den naturlige logaritme til at løse følgende ligninger:

- $2 \cdot e^{0,18x} = 8$
- $e^{-4x} = 2 \cdot e^{1,5x}$ (Svær: Brug potensregel, før brug af logaritmeregler)

Billeder

Side 5: ©iStock.com/artisteer (Kemiudstyr)

Side 6: ©iStock-162729797_tomislz (Seismograf)