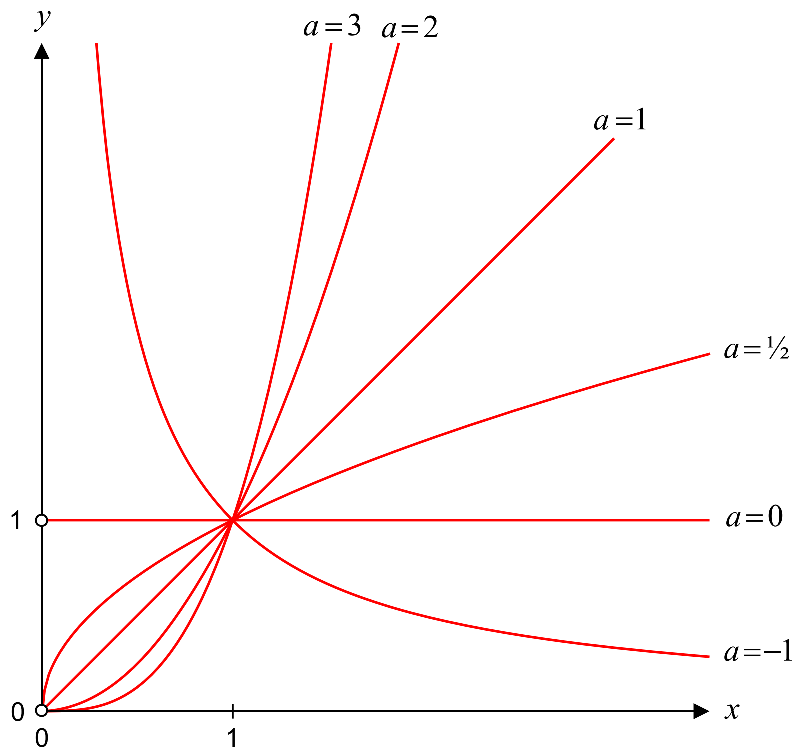
Potensfunktioner

I dette tillæg ser vi på beviser for sætninger, som involverer de såkaldte *potensfunktioner*.

Definition 1

En *potensfunktion* er en funktion på formen $f(x) = b \cdot x^a\,,\;\; x > 0$, hvor a er konstant, som kan være et vilkårligt reelt tal og b er en positiv konstant.

Konstanten b betyder en skalering af grafen i y-aksens retning, mens eksponenten a bestemmer grafens form. På den måde er a mest interessant. På figuren nedenfor ser vi på, hvordan grafen ser ud for forskellige værdier af a. I alle tilfælde holder vi b konstant lig med 1.



Sætning 2

Lad $f(x) = b \cdot x^a, x > 0$. Da gælder:

a) Grafen for f går igennem punktet $(1, b)$.

b) Hvis x ganges med en positiv faktor k, så ganges y med k^a.

c) En relativ ændring r_x i x-værdien medfører en relativ ændring r_y i y-værdien, bestemt af sammenhængen:

(1) $$1 + r_y = (1 + r_x)^a$$

d) Funktionen er *voksende* hvis $a > 0$ og *aftagende* hvis $a < 0$. For $a = 0$ er funktionen *konstant*.

Bemærkning 3 (Procentvis vækst)

Indholdet i c) i sætning 2 er, at hvis x ændres med en bestemt procent, så ændres y med en bestemt procent. Denne egenskab er netop kendetegnende for potensfunktionerne.

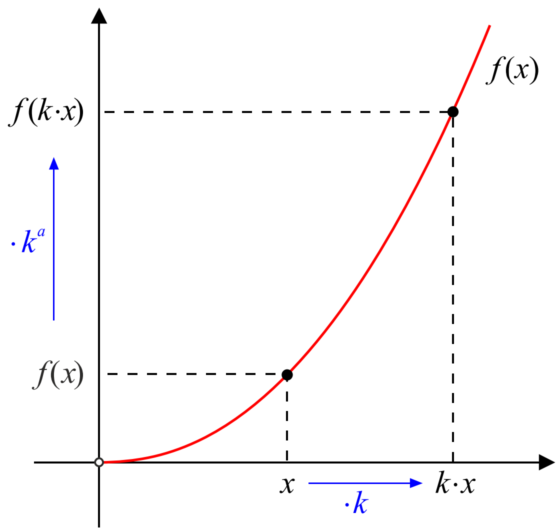
Bevis for sætning 2:

a) $f(1) = b \cdot 1^a = b \cdot 1 = b$. Når vi indsætter 1 på x's plads i forskriften, får vi altså b. Dette beviser a).

b) Vi skal se, hvad der sker med funktionsværdien, når vi ganger x-værdien med k. Vi udskifter altså x med $k \cdot x$ i forskriften:

(2) $$f(k \cdot x) = b \cdot (k \cdot x)^a = b \cdot k^a \cdot x^a = k^a \cdot b \cdot x^a = k^a \cdot f(x)$$

hvor vi har brugt potensregel (P4) og møbleret lidt rundt til sidst. Den nye y-værdi er altså den gamle ganget med k^a, som illustreret på figuren her:



c) Fremskrivningsfaktoren på x-aksen er $k = 1 + r_x$ og fremskrivningsfaktoren på y-aksen er $1 + r_y$. Ifølge b) fås direkte:

(3) $$1 + r_y = k^a = (1 + r_x)^a$$

hvorved c) er vist.

d) Undlader vi at bevise.

□

Eksempel 4

Lad $f(x) = 2 \cdot x^3$.

Ifølge sætning 2a) går grafen igennem punktet (1,2).

Hvis x ganges med $k = 1{,}05$, svarer det til, at x vokser med 5%. Ifølge sætning 2b) ganges y-værdien da med $k^a = 1{,}05^3 = 1{,}158$. Det betyder, at y vokser med 15,8%. En mere direkte metode er at bruge formel (1):

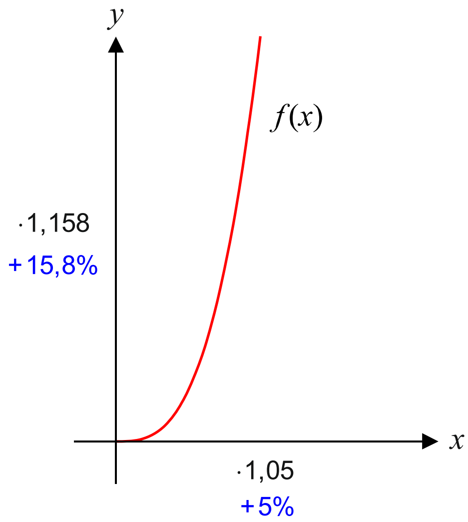
$$1 + r_y = (1 + r_x)^a$$

Idet $a = 3$ og $r_x = 0{,}05$ fås:

$$1 + r_y = (1 + 0{,}05)^3 = 1{,}05^3 = 1{,}158 \quad \Leftrightarrow \quad r_y = 1{,}158 - 1 = 0{,}158 = 15{,}8\%$$

Når x vokser med 5%, vokser y altså med 15,8%.

Pointerne i b) og c) i sætning 2 kan illustreres på følgende figur:



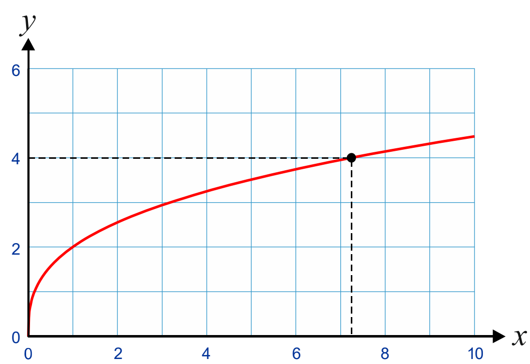
□

Bemærkning 5 (Definitionsmængden for potensfunktioner)

For $a = 2$ og $b = 1$ har vi andengradspolynomiet $f(x) = x^2$, som egentligt er defineret for alle x. Det giver således mening at indsætte for eksempel –1. Vi vælger imidlertid at sige, at alle potensfunktioner kun skal være defineret for alle positive x. Årsagen til det er, at f kun er defineret for positive x for visse værdier af a. Et godt eksempel er $f(x) = x^{-1} = 1/x$. Tilsvarende giver det heller ikke mening at indsætte negative værdier i funktionen $f(x) = x^{1/2}$. Sidstnævnte hænger sammen med, at $x^{1/2} = \sqrt{x}$. Da kvadratroden af et negativt tal ikke er defineret i de reelle tal, giver det heller ikke mening at indsætte negative tal i $x^{1/2}$.

Eksempel 6 (Funktionsligning)

Lad $f(x) = 2 \cdot x^{0{,}35}$. Hvis man har et CAS-værktøj til rådighed, så kan en ligning af typen $f(x) = 4$ nemt løses med en *solve* kommando. Men af matematiske grunde er det vigtigt at kunne løse en sådan ligning uden denne kommando – dog med en simpel lommeregner:



$$f(x) = 4 \;\Leftrightarrow\; 2 \cdot x^{0{,}35} = 4 \;\Leftrightarrow\; x^{0{,}35} = 2$$

$$\Leftrightarrow\; x = \sqrt[0{,}35]{2} = 7{,}25$$

Bemærkning 7 (Rødder)

Lad $x \geq 0$. Med den a'te rod af et tal x menes det tal $z \geq 0$, som opfylder at

$$z^a = x$$

Vi skriver:

(4) $$z = \sqrt[a]{x} \quad \Leftrightarrow \quad z^a = x$$

At tage den a'te rod er altså det modsatte af at opløfte i a'te potens. Pil mod højre i (4) viser, at man kan slippe af med en a'te rod ved at opløfte i a'te potens på begge sider af lighedstegnet. Pil mod venstre i (4) viser, at man kan slippe af med en a'te potens ved at tage den a'te rod på begge sider af lighedstegnet.

Forskriften ud fra to punkter på grafen

Vi har tidligere set, at man kan bestemme forskriften for en lineær funktion og en eksponentiel funktion, når man kender to punkter på funktionens graf. Dette er også tilfældet med potensfunktioner. Det vil vi se på nu.

Sætning 8

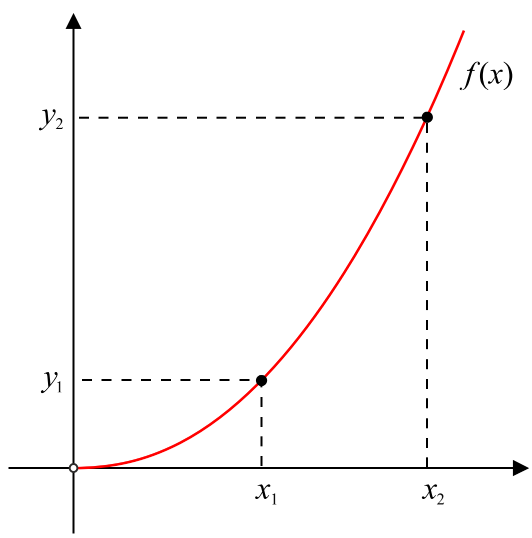
Lad $f(x) = b \cdot x^a$ og lad (x_1, y_1) og (x_2, y_2) være to punkter på grafen for *f*. Da kan *a* og *b* bestemmes ved følgende formler:

(5) $$a = \frac{\log(y_2) - \log(y_1)}{\log(x_2) - \log(x_1)}, \qquad b = \frac{y_1}{x_1^a}$$

Bevis: Da de to punkter ligger på grafen for *f*, passer de ind i forskriften, dvs.

(6) $$y_1 = b \cdot x_1^a, \qquad y_2 = b \cdot x_2^a$$

Her skal vi betragte (x_1, y_1) og (x_2, y_2) som kendte og *a* og *b* som de ubekendte.



Vi finder nu på at dividere de to y-værdier:

(7) $$\frac{y_2}{y_1} = \frac{b\cdot x_2^a}{b\cdot x_1^a} = \frac{x_2^a}{x_1^a} = \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^a$$

Det er nu tydeligt, hvorfor det var fornuftigt at dividere y-værdierne: konstanten b forkortes væk, så der kun er den ubekendte a tilbage. I sidste lighedstegn har vi anvendt potensregneregel (P5) – jf. tillægget *Eksponentielle funktioner - udvalgte beviser*. Man kunne i princippet forsøge at tage den a'te rod på begge sider, men da a er ukendt, fører dette ikke til, at a isoleres. Derfor anvender vi i stedet logaritmer. Vi tager logaritmen på begge sider i ligningen (7):

(8) $$\log\left(\frac{y_2}{y_1}\right) = \log\left(\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^a\right) \Leftrightarrow \log\left(\frac{y_2}{y_1}\right) = a\cdot\log\left(\frac{x_2}{x_1}\right)$$
$$\Leftrightarrow \frac{\log\left(\frac{y_2}{y_1}\right)}{\log\left(\frac{x_2}{x_1}\right)} = a \Leftrightarrow \frac{\log(y_2)-\log(y_1)}{\log(x_2)-\log(x_1)} = a$$

Fordelen ved at tage logaritmen er, at vi kan anvende reglen (L3), som flytter eksponenten a ned foran. Vi dividerer nu med $\log(x_2/x_1)$ på begge sider for at isolere a. I det sidste skridt har vi udnyttet logaritmeregneregel (L2). Begge udtryk for a er lige rigtige, så man kan vælge den, man foretrækker.

Logaritmeregneregler

(L1) $\log(a\cdot b) = \log(a)+\log(b)$

(L2) $\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a)-\log(b)$

(L3) $\log(a^x) = x\cdot\log(a)$

□

Eksempel 9

Vi vil bestemme en forskrift for den potensfunktion $f(x) = b\cdot x^a$, hvis graf går igennem de to punkter (2,5) og (6,27).

Løsning:

$$a = \frac{\log(y_2)-\log(y_1)}{\log(x_2)-\log(x_1)} = \frac{\log(27)-\log(5)}{\log(6)-\log(2)} = 1{,}5350$$

$$b = \frac{y_1}{x_1^a} = \frac{5}{2^{1{,}5350}} = 1{,}7254$$

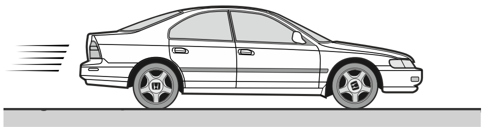
Altså fås $f(x) = 1{,}7254\cdot x^{1{,}5350}$.

□

Potensmodeller

Der er mange modeller fra virkeligheden, som har en potenssammenhæng. Nedenfor angives blot tre af dem.

Eksempel 1



Bremselængden af en bil afhænger af bilens hastighed. I en simpel model er bremselængden proportional med kvadratet af hastigheden: $f(x) = b \cdot x^2$, hvor x er bilens hastighed i km/t og y er bremselængden i m. Faktoren b er en konstant, som kun afhænger af friktionen mellem dæk og vejbane. Vi ser, at $a = 2$.

En konsekvens af loven er, at hvis en bil A har en hastighed, som er dobbelt så stor som hastigheden for en bil B (før den bremser), så vil bil A have en bremselængde, som er 4 gange så stor som bil B. Forklaringen fås direkte af sætning 2b): $k = 2 \;\Leftrightarrow\; k^a = 2^2 = 4$.

NB! Det skal dog nævnes, at man skal lægge den såkaldte *reaktionslængde* til *bremselængden* for at få den samlede *standselængde*.

Eksempel 2

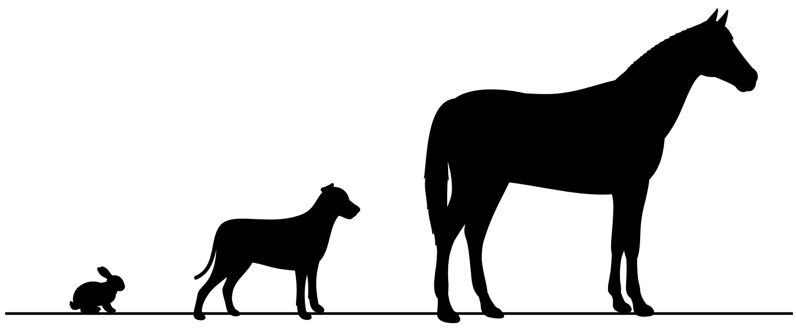
En anden interessant potensmodel er *Kleibers lov* i biologi. Denne empiriske lov er opkaldt efter den schweiziske biolog Max Kleiber, som i 1932 viste, at der er en systematisk sammenhæng mellem et dyrs kropsmasse og dets hvilestofskifte (BMR). Ifølge Kleibers lov kan sammenhængen beskrives ved modellen:

(9) $$f(x) = 3{,}4 \cdot x^{0{,}75}$$

hvor x er dyrets vægt i kilogram og $f(x)$ er dyrets hvilestofskifte målt i watt. Vi har:

$$f(70) = 3{,}4 \cdot 70^{0{,}75} = 82{,}3$$

Et dyr, som vejer 70 kg (det kunne også være et menneske med denne vægt), vil altså ifølge modellen have et hvilestofskifte på 82,3 watt.



Det er interessant at bemærke, at eksponenten $a < 1$. Hvis a havde være lig med 1, havde vi haft en proportional sammenhæng. I så tilfælde ville en fordobling af vægten have forårsaget en fordobling af hvilestofskiftet. Det er ikke tilfældet her. Hvis vægten fordobles, vil hvilestofskiftet øges med 68,2%, som formlen i sætning 2c) viser:

$$1+r_y = (1+r_x)^a \quad \Leftrightarrow \quad 1+r_y = (1+1)^{0,75} \quad \Leftrightarrow \quad 1+r_y = 1{,}682 \quad \Leftrightarrow \quad r_y = 0{,}682 = 68{,}2\%$$

Det er interessant at bemærke, at eksponenten a er mindre end 1. Hvis a havde været lig med 1, ville vi have haft en proportional sammenhæng. I så fald ville en fordobling af vægten medføre en fordobling af hvilestofskiftet. Det er ikke tilfældet her. Hvis vægten fordobles, vil hvilestofskiftet kun øges med 68,2 %, sådan som formlen i sætning 2c) viser:

$$1+r_y = (1+r_x)^a \quad \Leftrightarrow \quad 1+r_y = (1+1)^{0,75} \quad \Leftrightarrow \quad 1+r_y = 1{,}682 \quad \Leftrightarrow \quad r_y = 0{,}682 = 68{,}2\%$$

□

Eksempel 3 (Afstandskvadratloven)

Når lys udbreder sig fra en (tilnærmet) punktformig lyskilde, aftager lysets intensitet med afstanden efter loven:

(10) $$f(x) = b \cdot x^{-2}$$

hvor x er afstanden fra lyskilden og $f(x)$ er intensiteten. Vi ser, at $a = -2$. Vi har altså at gøre med en aftagende potensfunktion, hvilket kan forklares ved, at jo længere man fjerner sig fra lyskilden, jo større areal fordeles den samme stråling over, som illustreret på figuren nedenfor til venstre. Dermed reduceres intensiteten.

En konsekvens af modellen er, at hvis afstanden fordobles, bliver intensiteten $\frac{1}{4}$ gange så stor, dvs. 4 gange mindre. Dette ses af sætning 2b):

(11) $$k^a = 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$$

Figuren til venstre viser lys fra punktet C sendt ud i en rumvinkel. Den samme mængde lys rammer de grønne områder. Da arealerne af disse områder imidlertid vokser med radius i 2. potens, indser vi (11). Grafen viser, hvordan intensiteten aftager med afstanden.