Renteformlen – nogle beviser

Fremskrivningsfaktor

Vi undersøger først, hvordan man lægger en procent til et tal. Vi tager udgangspunkt i et eksempel: Vi ønsker at lægge 5% til 200. Allerede fra grundskolen ved vi, at man først finder ud af, hvor meget 5% udgør af 200 og derefter lægger den oprindelige værdi på 200 til. Man tager 5% af 200 ved at gange 200 med 5 og dividere med 100:

$$\begin{array}{ll} \text{5\% af 200:} & \tfrac{5}{100}\cdot 200 \;=\; 10 \\ \text{Lægge 5\% til 200:} & 200+10=210 \end{array}$$

For at gennemskue, hvad der sker, skriver vi hele processen op i et hug og omskriver:

Lægge 5% til 200: $\quad 200+\tfrac{5}{100}\cdot 200 \;=\; 200+0{,}05\cdot 200 \;=\; 200\cdot(1+0{,}05) \;=\; 200\cdot 1{,}05$

hvor vi i første lighedstegn har omskrevet $\tfrac{5}{100}$ til 0,05 og i andet lighedstegn har sat den fælles faktor 200 udenfor parentes – altså faktoriseret. Det gode ved det sidste udtryk er, at vi bare skal gange den oprindelige værdi med en faktor. Denne faktor, som i eksemplet er 1,05 kaldes for *fremskrivningsfaktoren*.

Det er ikke svært at se ud fra dette eksempel, at hvis vi generelt har en *rente* r, som skal lægges til en begyndelsesværdi B, så får vi slutværdien S ved at gange med $(1+r)$. Det giver følgende formel, hvor $(1+r)$ kaldes fremskrivningsfaktoren:

Sætning 1 (Procentvis vækst)

Hvis der lægges en rente r til en begyndelsesværdi på B, så fås slutværdien S ved:

(1) $$S=(1+r)\cdot B$$

Formlen kan både bruges til at lægge en procent til og trække en procent fra et tal. I det sidstnævnte tilfælde regnes renten bare negativ. Lad os se et par eksempler:

Lægge 37% til 500:

$$S \;=\; (1+r)\cdot B \;=\; (1+0{,}37)\cdot 500 \;=\; 1{,}37\cdot 500 \;=\; 685$$

Trække 17% fra 450:

$$S \;=\; (1+r)\cdot B \;=\; (1+(-0{,}15))\cdot 460 \;=\; (1-0{,}15)\cdot 460 \;=\; 0{,}85\cdot 460 \;=\; 391$$

Bemærkning 2

Læren ovenfor er, at det er smart at tænke i *fremskrivningsfaktorer*, når man skal lægge en procent til eller trække en procent fra et tal — fordi man blot skal gange med en faktor og dermed undgår at skulle lægge sammen og/eller trække fra.

Renteformlen

Ovenfor har vi set, hvordan vi kan lægge en procent til et tal én gang. Der er imidlertid en del tilfælde, hvor man har brug for at lægge den samme procent til flere gange. Det er for eksempel tilfældet, hvis vi har en kapital, som står på en konto i flere år og der hvert år tilskrives en fast rente. I dette tilfælde kommer renteformlen ind i billedet:

Sætning 3 (Renteformlen)

Et begyndelsesbeløb på K_0, som tilskrives renten r hver termin, bliver til slutbeløbet K_n efter i alt n terminer:

(2) $$K_n = K_0 \cdot (1+r)^n$$

Bevis: Vi kan opskrive, hvad der sker med det samlede beløb termin efter termin. Hver gang der går en termin, ganger vi det forrige beløb med fremskrivningsfaktoren $(1+r)$, jf. forrige afsnit. Efter n terminer, vil vi altså have ganget det oprindelige beløb på K_0 med $(1+r)$ i alt n gange, hvilket er det samme som at gange med $(1+r)^n$:

Nu | Efter 1 termin | Efter 2 terminer | Efter n terminer

$$K_0 \xrightarrow{\cdot(1+r)} K_0 \cdot (1+r) \xrightarrow{\cdot(1+r)} K_0 \cdot (1+r) \cdot (1+r) \xrightarrow{\cdot(1+r)} \ldots \xrightarrow{\cdot(1+r)} K_0 \cdot (1+r)^n$$

Dermed er sætningen bevist.

□

Bemærkning 4

Vi har ovenfor betegnet r som "renten". Det passer godt til situationer med penge i banken. Renteformlen kan imidlertid også bruges i mange andre tilfælde. For eksempel kan en bakteriekultur vokse med en bestemt procent i et tidsrum. I sådanne tilfælde er det mere passende at betegne r som *vækstraten*. Det er også værd at bemærke, at renteformlen i virkeligheden beskriver en eksponentiel vækst.

Der er fire typiske tilfælde, hvor renteformlen bruges, nemlig når enten K_n, K_0, r eller n skal bestemmes:

K_n skal bestemmes

(2) $$K_n = K_0 \cdot (1+r)^n$$

K_0 skal bestemmes

(3) $$K_0 = \frac{K_n}{(1+r)^n}$$

r skal bestemmes

(4) $$r = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} - 1$$

n skal bestemmes

(5) $$n = \frac{\log\left(\frac{K_n}{K_0}\right)}{\log(1+r)}$$

Udledninger:

Formel (2): Fremgår direkte af sætning 3.

Formel (3): Vi dividerer med faktoren $(1+r)^n$ på begge sider af lighedstegnet:

$$K_n = K_0 \cdot (1+r)^n \quad \Leftrightarrow \quad \frac{K_n}{(1+r)^n} = K_0$$

Formel (4): Vi dividerer først med K_0 på begge sider af lighedstegnet. Derefter tages den n'te rod på begge sider, og til sidst trækkes 1 fra på begge sider:

$$K_n = K_0 \cdot (1+r)^n \quad \Leftrightarrow \quad \frac{K_n}{K_0} = (1+r)^n \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} = 1+r$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} - 1 = r$$

Formel (5): Vi dividerer først med K_0 på begge sider af lighedstegnet. Derefter tager vi logaritmen på begge sider. Derefter bruges en logaritmeregel på højre side, nemlig (P3): $\log(a^x) = x \cdot \log(a)$. Endelig dividerer man med $\log(1+r)$ på begge sider af lighedstegnet:

$$K_n = K_0 \cdot (1+r)^n \quad \Leftrightarrow \quad \frac{K_n}{K_0} = (1+r)^n \quad \Leftrightarrow \quad \log\left(\frac{K_n}{K_0}\right) = \log\left((1+r)^n\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \log\left(\frac{K_n}{K_0}\right) = n \cdot \log(1+r) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\log\left(\frac{K_n}{K_0}\right)}{\log(1+r)} = n$$

Lad os se på nogle forskellige eksempler på brugen af de forskellige formler:

Eksempel 5

Et beløb på 600 kr. bliver indsat på en konto til en årlig rente på 8%. Hvor meget bliver beløbet til på 5 år?

Løsning: Vi benytter formel (2):

$$K_n \;=\; K_0 \cdot (1+r)^n \;=\; 600 \cdot (1+0{,}08)^5 \;=\; 600 \cdot 1{,}08^5 \;=\; 881{,}60$$

Altså er kontoens saldo på 881,60 kr. efter 5 år.

□

Eksempel 6

En fiskebestand er vokset med 12% hvert år i 7 år. Nu er der 40000 fisk i dambruget. Hvor mange fisk var der oprindeligt i dambruget?

Løsning: Det er oplagt, at det er K_0 vi skal bestemme. Derfor bruger vi formel (3):

$$K_0 \;=\; \frac{K_n}{(1+r)^n} \;=\; \frac{40000}{(1+0{,}12)^7} \;=\; \frac{40000}{1{,}12^7} \;=\; 18094$$

Der var altså knap 18100 fisk oprindeligt.

□

Eksempel 7

Befolkningen i en by er på 10 år vokset fra 20000 til 29600. Hvor mange procent er befolkningen i byen vokset med i *gennemsnit* over de 10 år.

Løsning: Her er det renten *r*, som skal bestemmes. Begrundelsen for at vi kan bruge formel (4) er, at når man spørger efter den gennemsnitlige årlige vækst, så leder man netop efter den faste rente *r*, som får 20000 til at vokse til 29600 på 10 år. Derfor bruger vi formel (4):

$$r \;=\; \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}}-1 \;=\; \sqrt[10]{\frac{29600}{20000}}-1 \;=\; 1{,}0399-1 \;=\; 0{,}0399$$

Altså er befolkningen i byen gennemsnitligt vokset med 4,0% pr. år.

□

Eksempel 8

En bestemt fugl på en ø er de sidste par år vokset i antal med 5% pr. år. Nu er der 14500 individer. Hvor lang tid vil det vare, før bestanden er vokset til 20000 fugle, hvis den procentvise vækst fortsætter uændret?

Løsning: Her er det antal år *n*, som skal bestemmes. Vi benytter derfor formel (5):

$$n \;=\; \frac{\log\left(\dfrac{K_n}{K_0}\right)}{\log(1+r)} \;=\; \frac{\log\left(\dfrac{20000}{14500}\right)}{\log(1+0{,}05)} \;=\; 6{,}59$$

Altså vil det tage ca. 6,6 år før bestanden har nået 20000 fugle – vel at mærke hvis væksten fortsætter uændret.

□

Ekstra

Hvis renten *r* *ikke* er den samme hver termin, kan renteformlen ikke bruges. Antag at begyndelsesværdien er 5000 kr., og at renterne de tre første år var henholdsvis 7%, 11% og 18%. Hvad ville du gøre for at bestemme slutbeløbet efter de tre år? Tænk i fremskrivningsfaktorer, jf. det første afsnit …