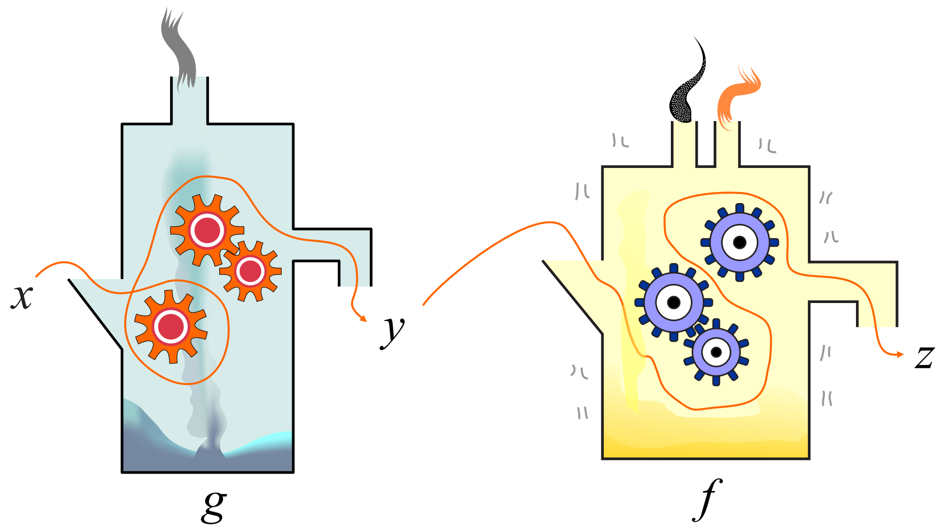
Sammensat funktion

Vi skal studere *sammensætning af funktioner*. Her er analogien af en funktion som værende en slags "maskine" nyttig: Hver funktion har dens egen maskine. Et x smides ind i den første maskine, y spyttes ud, og denne værdi smides videre ind i den næste maskine, som spytter z ud. Men kunne vi ikke lave en maskine, som klarer det hele på en gang, dvs. tager x ind og spytter z ud?



$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, mapsto, "g"] \arrow[rr, bend left, "f \circ g"] & y \arrow[r, mapsto, "f"] & z \end{tikzcd}$$

Udtrykt i matematisk sprog søger vi en funktion, som afbilder x i z. Men $y = g(x)$, så vi kan indsætte $g(x)$ på x's plads i forskriften for den anden funktion f. Den sammensatte funktion betegnes med $f \circ g$ (læs: "f bolle g"), og den opfylder:

(1) $$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

Lad os se på et eksempel.

Eksempel 1

Lad $f(x) = x^2 + x + 2$ og $g(x) = x + 3$. Vi vil bestemme forskriften for $f \circ g$. Af pædagogiske årsager skriver vi $f(y) = y^2 + y + 2$ og indsætter derefter $y = g(x) = x + 3$:

$$(f \circ g)(x) \;=\; f(g(x)) \;=\; f(x+3) \;=\; (x+3)^2 + (x+3) + 2 \;=\; x^2 + 7x + 14$$

hvor vi tillige af æstetiske årsager har reduceret udtrykket i sidste lighedstegn. Man kunne også finde på at sammensætte funktionerne i den modsatte rækkefølge, altså bestemme forskriften for $g \circ f$. Her skriver vi så $g(y) = y + 3$ og $y = f(x) = x^2 + x + 3$:

$$(g \circ f)(x) \;=\; g(f(x)) \;=\; g(x^2 + x + 2) \;=\; (x^2 + x + 2) + 3 \;=\; x^2 + x + 5$$

Vi opdager samtidigt, at $f \circ g \neq g \circ f$. Det er faktisk også det normale, altså at det normalt *ikke* er ligegyldigt hvilken rækkefølge der sammensættes i.

Bemærkning 2

I udtrykket $f \circ g$ kalder man ofte *g* for den *indre funktion* og *f* for den *ydre funktion*. Vi kommer til at stifte meget mere bekendtskab med dette, når vi kommer til differentialregningen lidt senere.

Eksempel 3 (Find en indre og ydre funktion)

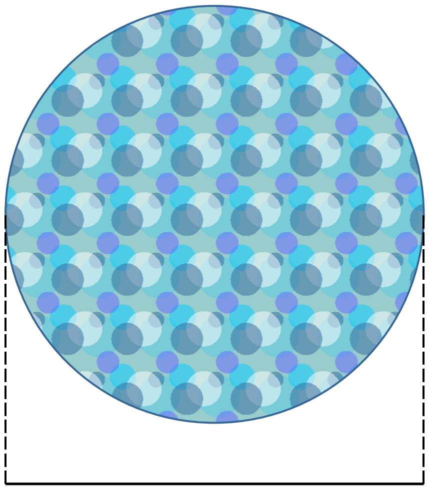
Ofte har man en funktion, som har en kompliceret udseende forskrift, og ønsker at bestemme to simplere funktioner, som den er sammensat af. Funktionen $h(x) = (3x-6)^4$ kan for eksempel ses som sammensætningen af den ydre funktion $f(y) = y^4$ og den indre funktion $g(x) = 3x-6$, som følgende viser:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(3x-6) = (3x-6)^4$$

Bemærk, at vi af pædagogiske grunde har skrevet den ydre funktion som $f(y) = y^4$, da vi så erstatter *y* med $g(x)$. Men vi kunne lige så vel have skrevet $f(x) = x^4$.

Eksempel 4 (En anvendelse)

I en forretning kan man købe duge til cirkulære borde. Prisen udregnes ved, at der betales et fast udskæringsgebyr på 60 kr. Derudover skal man betale 25 kr. pr. m^2 stof. Bestem en funktion, som givet diameteren af bordet, direkte giver dugens pris i kr.



Diameter: d

Løsning:
Man kan forestille sig en funktion *g*, som givet diameteren af bordet, angiver bordets areal i m^2. Den velkendte formel for arealet af en cirkel er $A = \pi \cdot r^2$, men da input her er diameteren *d*, skal vi regne lidt:

$$g(d) = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot \left(\tfrac{1}{2}d\right)^2 = \pi \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 \cdot d^2 = \tfrac{1}{4} \cdot \pi \cdot d^2$$

Den funktion, som givet arealet giver prisen, kan skrives således:

$$f(A) = 25 \cdot A + 60$$

Sammensætningen af de to funktioner $d \xrightarrow{g} A \xrightarrow{f} P$ er som følger:

$$(f \circ g)(d) \;=\; f(g(d)) \;=\; f(\tfrac{1}{4}\pi d^2) \;=\; 25 \cdot \left(\tfrac{1}{4}\pi d^2\right) + 60 \;=\; \tfrac{25}{4}\pi \cdot d^2 + 60$$

Vi behøver altså ikke først udregne arealet og derefter prisen, vi kan gøre det i ét hug. Lad os se på et eksempel. Et bord har en radius på 2,2 m. Hvor meget koster dugen dertil?

$$(f \circ g)(2{,}2) \;=\; \tfrac{25}{4}\pi \cdot 2{,}2^2 + 60 \;=\; 155{,}03$$

Så svaret er altså, at dugen koster 155,03 kr.

Opgaver

Opgave 1

Bestem i hvert tilfælde nedenfor manuelt forskrifterne for hver af de sammensatte funktioner $f \circ g$ og $g \circ f$. Som kontrol kan du bagefter bruge dit CAS-værktøj til at beregne forskrifterne.

a) $f(x) = \sqrt{x}$ og $g(x) = x^2 + 7$

b) $f(x) = 2x + 8$ og $g(x) = -x + 10$

c) $f(x) = \sin(x)$ og $g(x) = x + x^2$

d) $f(x) = \dfrac{2}{x-1}$ og $g(x) = x^2$

Opgave 2

Nedenstående funktion *h* kan opfattes som sammensætning af to funktioner *f* og *g*. Hvilke? Bemærk, at der kan være flere svar her. Som regel er der dog et oplagt svar.

a) $h(x) = e^{2x}$

b) $h(x) = \sqrt{4 - x^2}\ ,\ x \in [-2, 2]$

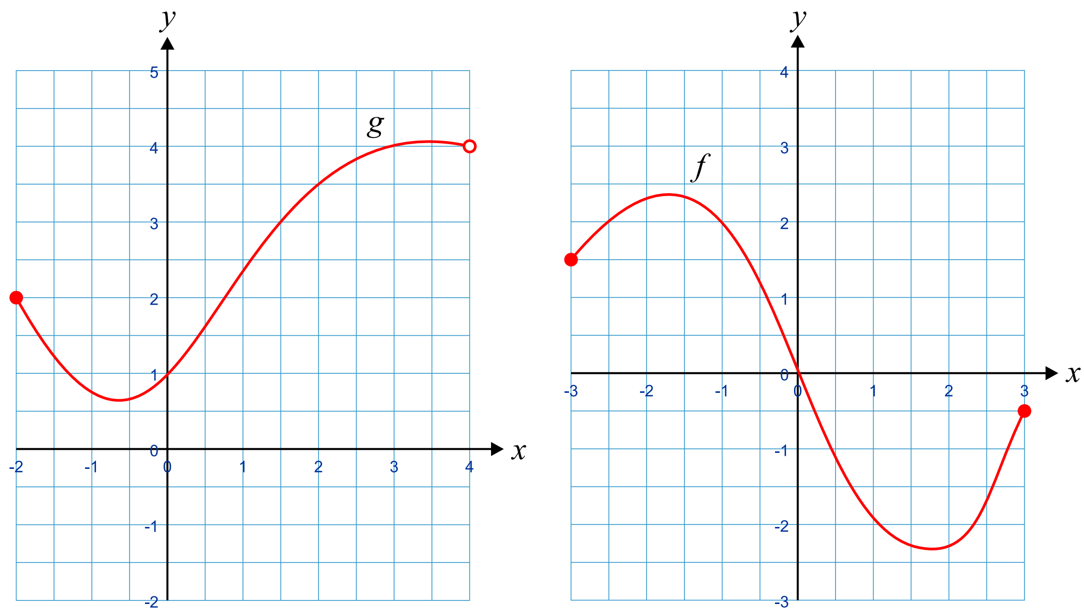
c) $h(x) = (x-6)^8$

d) $h(x) = \dfrac{1}{\sin(x)}\ ,\ x \in \left]-\pi, \pi\right[$

Opgave 3

Figuren viser graferne for to funktioner *f* og *g*. Bestem grafisk følgende funktionsværdier for visse sammensatte funktioner:

a) $(g \circ f)(-1)$ b) $(f \circ g)(1{,}5)$ c) $(f \circ f)(-1)$



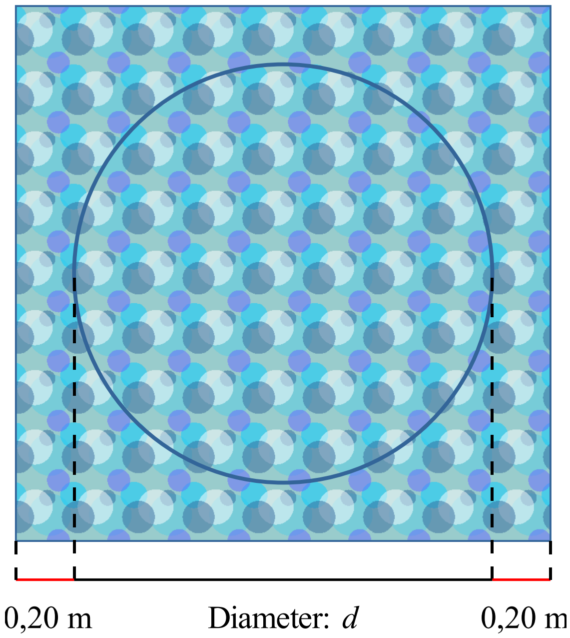
Opgave 4 (Dug til cirkulært bord)

Betragt igen eksempel 4. Firmaet vurderer efter nogle måneder, at kunden selv skal betale for det stof, som går til spilde ved udskæringen. Kunden skal også selv betale for det stykke af dugen, som skal hænge ned fra bordet. Alt i alt betyder det, at kunden skal betale for det stykke stof, som er vist på figuren nedenfor: Et kvadrat, hvor der på hver side af cirklen er ekstra 20 cm stof.

a) Udled udtrykket for en sammensat funktion, som angiver prisen, givet diameteren af det cirkulære bord.

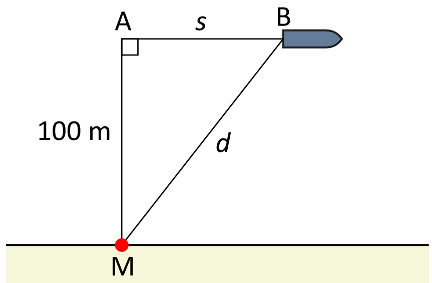
b) Hvor meget skal kunden nu betale for en dug til et bord med diameter 2,2 m?

c) En anden kunde betalte 180 kr. for en dug. Hvad var bordets diameter?



Opgave 5 (Sammensat funktion)

Et skib sejler langs med stranden, hvor en mand M står stille. Skibet starter i punktet A lige ud for manden i afstanden 100 m fra stranden. Skibets tilbagelagte strækning fra A kalder vi s, og skibets direkte afstand til manden med d.



a) Bestem et udtryk for d som funktion af s.

Det oplyses nu, at skibet sejler med den konstante hastighed 5 m/s.

b) Bestem et udtryk for d som funktion af tiden t ved at tænke på sammensat funktion.