

Trigonometri

Definitioner via retvinklet trekant

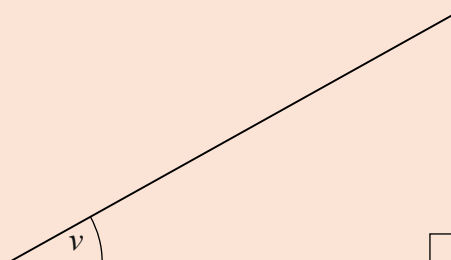
Vi skal se, hvordan man kan definere *sinus*, *cosinus* og *tangens* i en retvinklet trekant. Ved hjælp af disse funktioner, kan man foretage beregninger i trekanter. Betegnelsen "trigonometri" handler da også om at "måle" i trekanter.

Definitioner

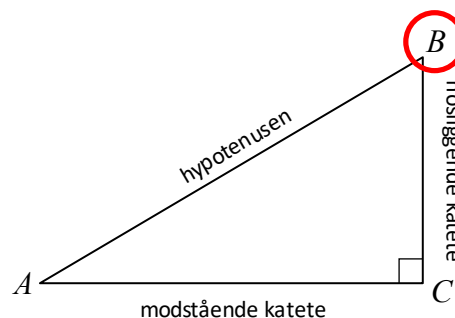
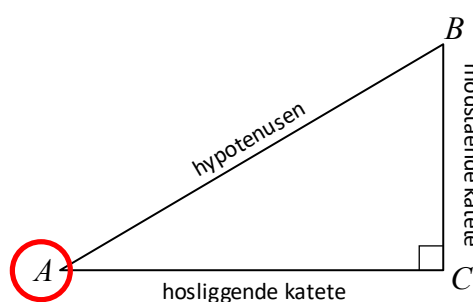
$$\sin(v) = \frac{\text{modstående katete}}{\text{hypotenusen}}$$

$$\cos(v) = \frac{\text{hosliggende katete}}{\text{hypotenusen}}$$

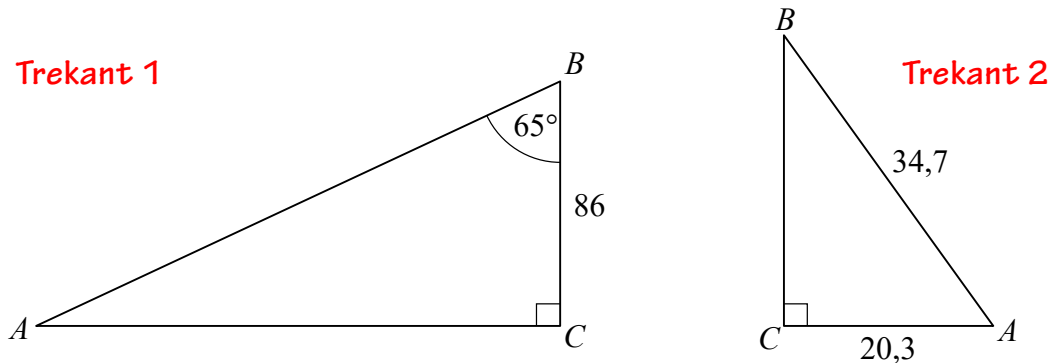
$$\tan(v) = \frac{\text{modstående katete}}{\text{hosliggende katete}}$$



Husk at i en retvinklet trekant betegnes den lange side, som ligger overfor den rette vinkel, *hypotenusen*, mens de to korteste sider, som støder op til den rette vinkel, betegnes *kateter*. Hvis vi "står i en vinkel", så vil vi betegne den katete, som ligger overfor vinklen for den *modstående katete*, mens den katete, som støder op til den vinkel man "står i", betegnes den *hosliggende katete*. Om en katete er modstående eller hosliggende afhænger således af, i hvilken vinkel "man står". Det er illustreret på figuren nedenfor.



Ved beregninger i retvinklede trekanter skal man aldrig "stå i den rette vinkel"! Når man skal løse opgaver "stiller man sig i den vinkel", som kendes eller skal findes. Dernæst spørger man sig selv om hvilke sider, som er involveret. Hermed menes de sider som kendes eller skal findes. Herudfra vælges den relevante trigonometriske funktion. Hvis den hosliggende katete og hypotenusen for eksempel er involveret, så er det cosinus, som skal benyttes. Hvis de to kateter er involveret, er det tangens, der vælges, etc. På næste side vil vi kigge på to eksempler. Først skal det dog lige nævnes, at der er følgende sammenhæng mellem sinus, cosinus og tangens, nemlig: $\tan(v) = \sin(v)/\cos(v)$. Rigtigheden heraf fremgår ved at dividere udtrykkene for sinus og cosinus ovenfor og reducere.



Eksempel 1

I trekant 1 ønskes siden b bestemt. Da vi kender vinkel B stiller vi os der. De involverede sider er dermed den hosliggende katete, der kendes, og den modstående katete, som skal findes. Da tangens involverer begge kateter, er det den vi skal benytte:

$$\tan(65^\circ) = \frac{\text{modstående katete}}{\text{hosliggende katete}} = \frac{b}{86}$$

Den ukendte side fås ved at gange med 86 på begge sider:

$$b = 86 \cdot \tan(65^\circ) = 184,4$$

Eksempel 2

I trekant 2 ønskes vinklen A bestemt. Da vi skal finde A , stiller vi os der. De involverede sider er dermed den hosliggende katete og hypotenusen, som begge kendes. Da cosinus involverer netop disse sider, skal vi benytte cosinus:

$$\cos(A) = \frac{\text{hosliggende katete}}{\text{hypotenusen}} = \frac{20,3}{34,7} = 0,5850$$

Vi ved altså hvad cosinus til den ukendte vinkel A er lig med, nemlig 0,5850. For at finde A selv, må vi benytte den *omvendte funktion* til cosinus, som betegnes \cos^{-1} . Funktionen kan også findes på lommeregneren. Vi får:

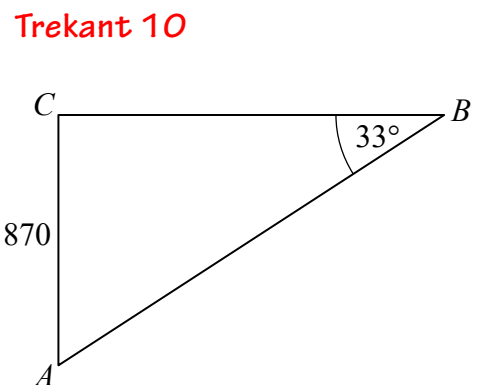
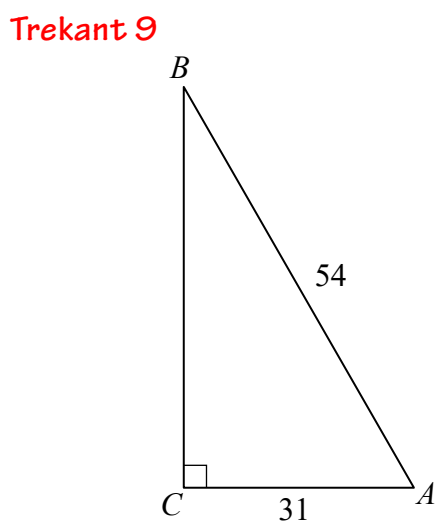
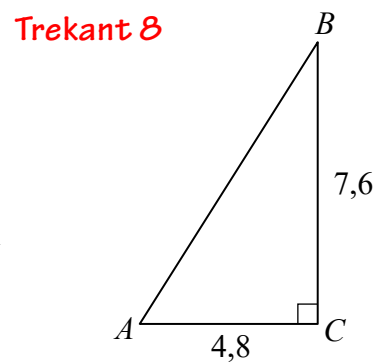
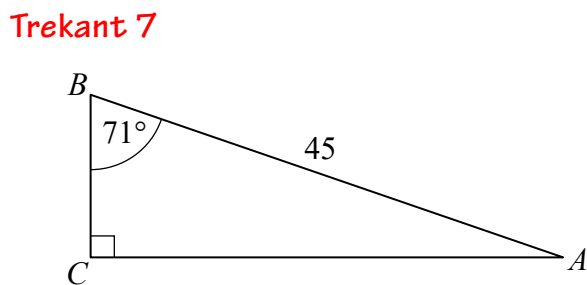
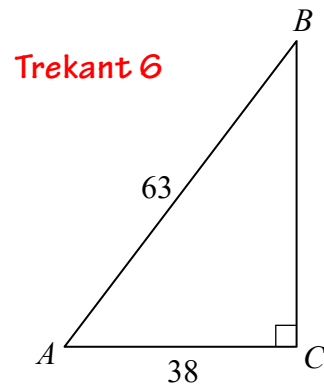
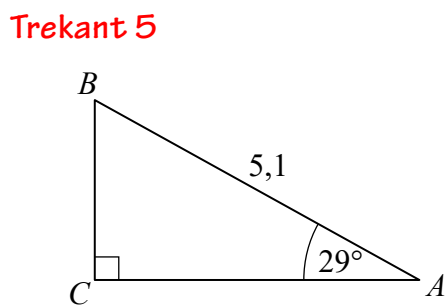
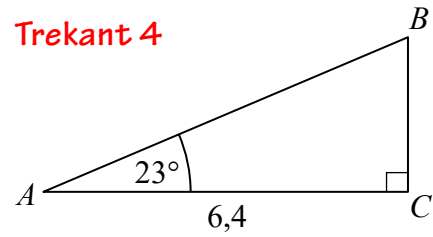
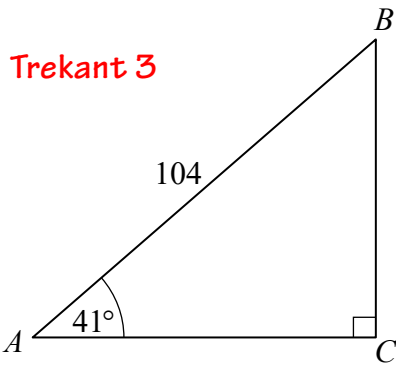
$$A = \cos^{-1}(0,5850) = 54,2^\circ$$

Bemærk, at du bør benytte mindst fire decimaler, når du regner med de trigonometriske funktioner – for at undgå at fejl bliver for store. Benyt gerne alle i mellemregninger!

Opgave 1

Løs nedenstående opgaver i trekantene på næste side.

- | | |
|------------------------------------|------------------------------------|
| a) Bestem siden b i trekant 3. | e) Bestem siden b i trekant 7. |
| b) Bestem siden c i trekant 4. | f) Bestem vinklen A i trekant 8. |
| c) Bestem siden a i trekant 5. | g) Bestem vinklen A i trekant 9. |
| d) Bestem vinklen B i trekant 6. | h) Bestem siden c i trekant 10. |



Opgave 2

Løs nedenstående opgaver, idet du først skitserer en trekanten med de opgivne oplysninger. Sørg for, at den er nogenlunde realistisk i forholdene!

- I en retvinklet trekant er $a = 4,8$; $B = 32^\circ$; $C = 90^\circ$. Bestem siden c .
- I en retvinklet trekant er $b = 0,67$; $c = 1,04$; $C = 90^\circ$. Bestem vinklen A .
- I en retvinklet trekant er $c = 41$; $a = 23$; $C = 90^\circ$. Bestem vinklen A .
- I en retvinklet trekant er $b = 16,7$; $A = 82^\circ$; $C = 90^\circ$. Bestem siden a .
- I en retvinklet trekant er $b = 42$; $B = 68^\circ$; $C = 90^\circ$. Bestem siden a .
- I en retvinklet trekant er $b = 12,9$; $c = 18,7$; $C = 90^\circ$. Bestem vinklen B .

Opgave 3

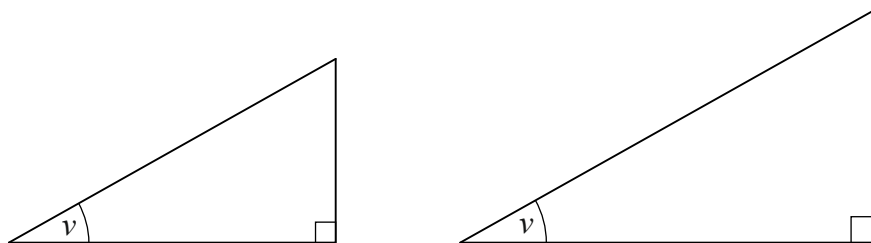
I en retvinklet trekant oplyses det, at $a = 28$; $b = 35$; $C = 90^\circ$. Bestem de ukendte sider og vinkler i trekanten. Du bestemmer selv i hvilken rækkefølge. Du må også gerne gøre brug af Pythagoras' sætning samt udnytte vinkelsummen i en trekant.

Opgave 4

En retvinklet trekant er $b = 83$; $B = 38^\circ$; $C = 90^\circ$. Bestem de ukendte sider og vinkler i trekanten. Du bestemmer selv i hvilken rækkefølge. Du må også gerne gøre brug af Pythagoras' sætning samt udnytte vinkelsummen i en trekant.

Opgave 5 (Sværere)

Denne opgave er af teoretisk art. Overvej hvorfor definitionerne af sinus, cosinus og tangens er *veldefinerede*, dvs. at der *ikke* findes to forskellige retvinklede trekanter med *samme* vinkel v , hvor brøkerne i definitionerne af sinus, cosinus og tangens giver noget forskelligt (*Hjælp*: Tænk på ensvinklede trekanter!)



Løsninger til opgave 1:

- | | |
|-----------------|-----------------|
| a) 78,5 | e) 42,5 |
| b) 6,95 | f) $57,7^\circ$ |
| c) 2,47 | g) $55,0^\circ$ |
| d) $37,1^\circ$ | h) 1597 |