Trigonometri

Definitioner via retvinklet trekant

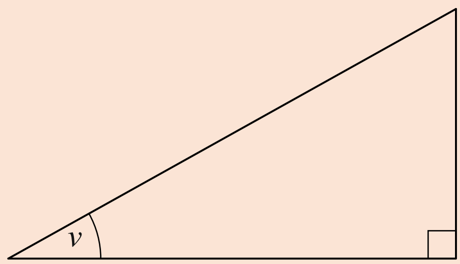
Vi skal se, hvordan man kan definere *sinus*, *cosinus* og *tangens* i en retvinklet trekant. Ved hjælp af disse funktioner, kan man foretage beregninger i trekanter. Betegnelsen "trigonometri" handler da også om at "måle" i trekanter.

Definitioner

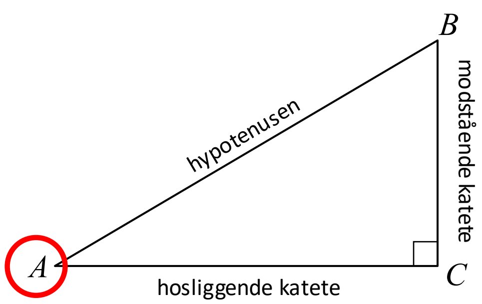
$$\sin(v) \;=\; \frac{\text{modstående katete}}{\text{hypotenusen}}$$

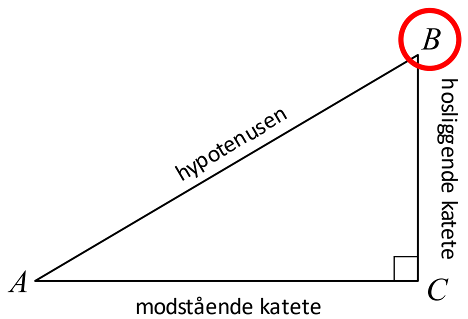
$$\cos(v) \;=\; \frac{\text{hosliggende katete}}{\text{hypotenusen}}$$

$$\tan(v) \;=\; \frac{\text{modstående katete}}{\text{hosliggende katete}}$$

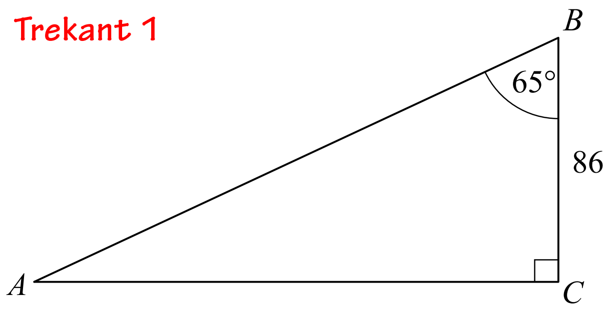


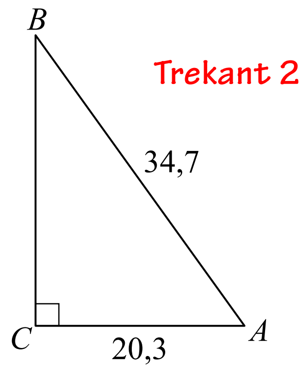
Husk at i en retvinklet trekant betegnes den lange side, som ligger overfor den rette vinkel, *hypotenusen*, mens de to korteste sider, som støder op til den rette vinkel, betegnes *kateter*. Når vi skal løse opgaver, vil vi "stille os i en vinkel", og det skal aldrig være den rette vinkel. Når vi står i en vinkel, vil vi betegne den katete, som ligger overfor vinklen, for den *modstående katete*, mens den katete, som støder op til den vinkel man "står i", betegnes den *hosliggende katete*. Om en katete er modstående eller hosliggende afhænger således af, i hvilken vinkel "man står". Det er illustreret på figurerne nedenfor.





Når man skal løse opgaver "stiller man sig i den vinkel", som kendes eller skal findes. Dernæst spørger man sig selv om hvilke sider, som er involveret. Hermed menes de sider som kendes eller skal findes. Herudfra vælges den relevante trigonometriske funktion. Hvis den hosliggende katete og hypotenusen for eksempel er involveret, så er det cosinus, som skal benyttes. Hvis de to kateter er involveret, er det tangens, der vælges, etc. På næste side vil vi kigge på to eksempler. Først skal det dog lige nævnes, at der er følgende sammenhæng mellem sinus, cosinus og tangens, nemlig: $\tan(v) = \sin(v)/\cos(v)$. Rigtigheden heraf fremgår ved at dividere udtrykkene for sinus og cosinus ovenfor og reducere.





Eksempel 1

I trekant 1 ønskes siden b bestemt. Da vi kender vinkel B, stiller vi os der. De involverede sider er dermed den hosliggende katete, der kendes, og den modstående katete, som skal findes. Da tangens involverer begge kateter, er det den vi skal benytte:

$$\tan(65°) = \frac{\text{modstående katete}}{\text{hosliggende katete}} = \frac{b}{86}$$

Den ukendte side fås ved at gange med 86 på begge sider:

$$b = 86 \cdot \tan(65°) = 184{,}4$$

□

Eksempel 2

I trekant 2 ønskes vinklen A bestemt. Da vi skal finde A, stiller vi os der. De involverede sider er dermed den hosliggende katete og hypotenusen, som begge kendes. Da cosinus involverer netop disse sider, skal vi benytte cosinus:

$$\cos(A) = \frac{\text{hosliggende katete}}{\text{hypotenusen}} = \frac{20{,}3}{34{,}7} = 0{,}5850$$

Vi ved altså hvad cosinus til den ukendte vinkel A er lig med, nemlig 0,5850. For at finde A selv, må vi benytte den *omvendte funktion* til cosinus, som betegnes $\cos^{-1}$. Funktionen kan også findes på lommeregneren. Vi får:

$$A = \cos^{-1}(0{,}5850) = 54{,}2°$$

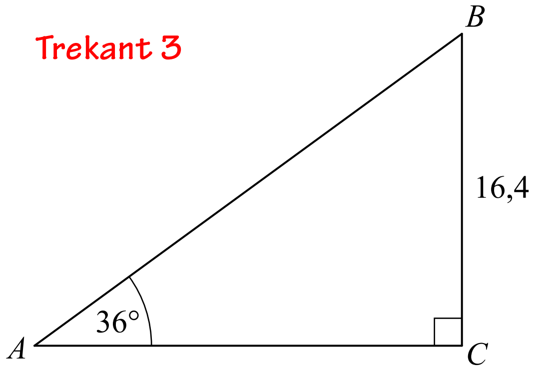
Bemærk, at du bør benytte mindst fire decimaler, når du regner med de trigonometriske funktioner – for at undgå at fejl bliver for store. Benyt gerne alle i mellemregninger!

□

Eksempel 3

I trekant 3 på næste side ønsker vi at bestemme hypotenusen c. Vi kender vinklen A, så vi stiller os der. De involverede sider er da den modstående katete og hypotenusen. Vi benytter derfor sinus:

$$\sin(36°) = \frac{\text{modstående katete}}{\text{hypotenusen}} = \frac{16{,}4}{c}$$



Da den ukendte side c står i nævneren i ligningen på forrige side, må vi foretage et par omskrivninger. Først ganger vi på begge sider med nævneren c. Derefter dividerer vi med $\sin(36°)$ på begge sider:

$$c \cdot \sin(36°) = 16{,}4 \quad \Leftrightarrow \quad c = \frac{16{,}4}{\sin(36°)} = 27{,}9$$

□

Bemærkninger

Det er klart, at vi i alle tre eksempler ovenfor kunne have benyttet *solve* i vores CAS-værktøj til at bestemme den ubekendte, så snart den trigonometriske ligning var blevet opstillet. Det er et valg, man må tage.

Kender man i en retvinklet trekant udover den rette vinkel enten to sider eller en side og en vinkel, kan man altid bestemme en hvilken som helst anden side/vinkel ved hjælp af de trigonometriske funktioner. Tilfældet, hvor man kun kender tre sider, er ikke interessant, for tre vinkler er som bekendt ikke tilstrækkelig til at fastlægge trekanten entydigt! Hvis man yderligere tager to andre værktøjer i brug, nemlig at *vinkelsummen* i en trekant er 180° og *Pythagoras' sætning*: $a^2 + b^2 = c^2$, kan man altid bestemme en hvilken som helst ukendt side/vinkel i et hug. Vi holder os dog til de trigonometriske funktioner her.

I dette tillæg ser vi kun på de trigonometriske funktioner som hjælpemiddel til at bestemme ukendte sider/vinkler i en retvinklet trekant. Definitionerne på side 1 i dette tillæg duer da også kun for vinkler mellem 0° og 90°, altså for $0 < v < 90°$. Senere vil det blive vist, hvordan $\sin(x)$ og $\cos(x)$ kan *udvides* til at give mening for alle reelle tal x. Tangens er da defineret som $\tan(x) = \sin(x)/\cos(x)$, for de x, hvor nævneren ikke giver 0.

De trigonometriske funktioner dukker op mange steder i matematikken, for eksempel i vektorregning, i formler for arealer og mange i anvendelser. I teorien for bølger og svingninger i fysikken er de trigonometriske funktioner ligefrem grundsubstansen.

Et andet vigtigt sted, hvor de trigonometriske funktioner dukker op, er i *projektioner*. Her tilføjes en cosinus-faktor. Den interesserede læser kan studere opgave 10.

Opgaver

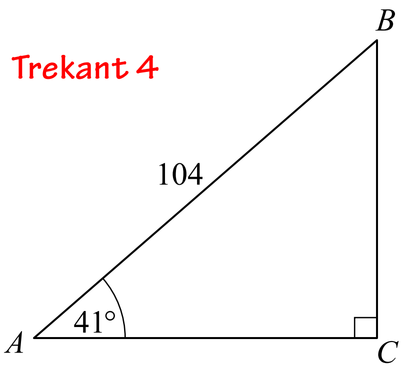
Nedenfor en række opgaver i trigonometri. Opgaver med en eller to stjerner forventes at være sværere end de øvrige.

Opgave 1

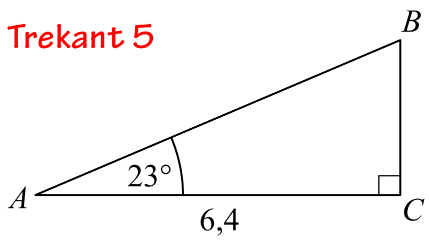
Løs følgende opgaver i trekanterne nedenfor:

a) Bestem siden b i trekant 4.
b) Bestem siden c i trekant 5.
c) Bestem siden a i trekant 6.
d) Bestem vinklen B i trekant 7.
e) Bestem siden b i trekant 8.
f) Bestem vinklen A i trekant 9.

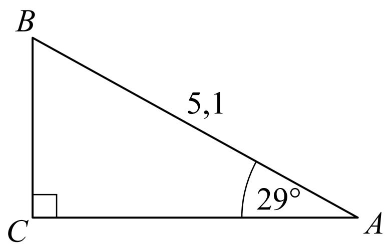
Trekant 4



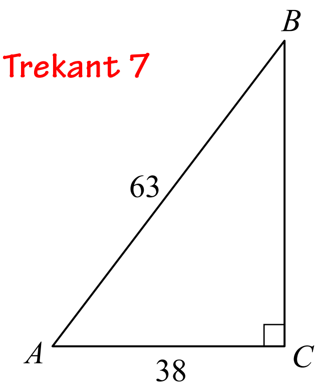
Trekant 5



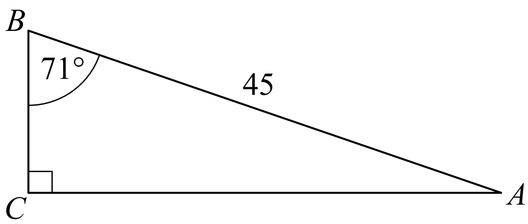
Trekant 6



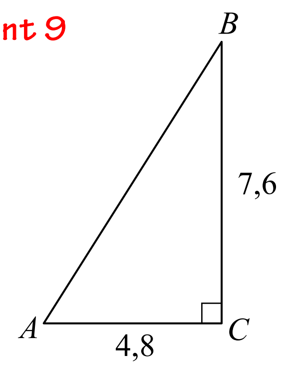
Trekant 7



Trekant 8



Trekant 9

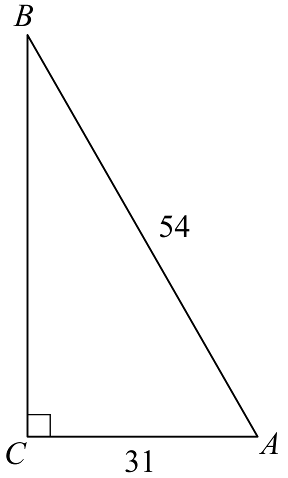


Opgave 2

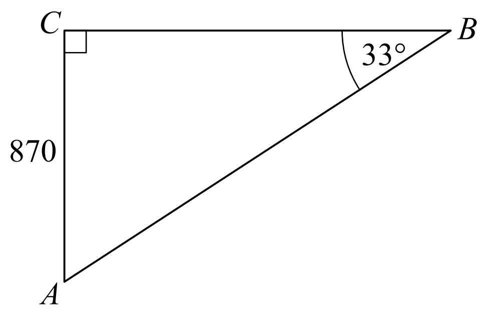
Løs følgende opgaver i trekanterne nedenfor:

a) Bestem vinklen A i trekant 10 b) Bestem siden c i trekant 11.

Trekant 10



Trekant 11



Opgave 3

Løs nedenstående opgaver, idet du først skitserer en trekanten med de opgivne oplysninger. Sørg for, at den er nogenlunde realistisk i forholdene!

a) I en retvinklet trekant er $a = 4,8;\ B = 32°;\ C = 90°$. Bestem siden c.
b) I en retvinklet trekant er $b = 0,67;\ c = 1,04;\ C = 90°$. Bestem vinklen A.
c) I en retvinklet trekant er $c = 41;\ a = 23;\ C = 90°$. Bestem vinklen A.
d) I en retvinklet trekant er $b = 16,7;\ A = 82°;\ C = 90°$. Bestem siden a.
e) I en retvinklet trekant er $b = 42;\ B = 68°;\ C = 90°$. Bestem siden a.
f) I en retvinklet trekant er $b = 12,9;\ c = 18,7;\ C = 90°$. Bestem vinklen B.

Opgave 4

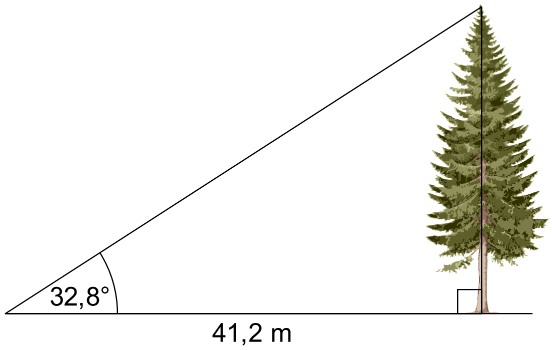
I en retvinklet trekant oplyses det, at $a = 28;\ b = 35;\ C = 90°$. Bestem de ukendte sider og vinkler i trekanten. Du bestemmer selv i hvilken rækkefølge. Du må også gerne gøre brug af Pythagoras' sætning samt udnytte vinkelsummen i en trekant, selv om det ikke er nødvendigt.

Opgave 5

En retvinklet trekant er $b = 83;\ B = 38°;\ C = 90°$. Bestem de ukendte sider og vinkler i trekanten. Du bestemmer selv i hvilken rækkefølge. Du må også gerne gøre brug af Pythagoras' sætning samt udnytte vinkelsummen i en trekant, selv om det ikke er nødvendigt.

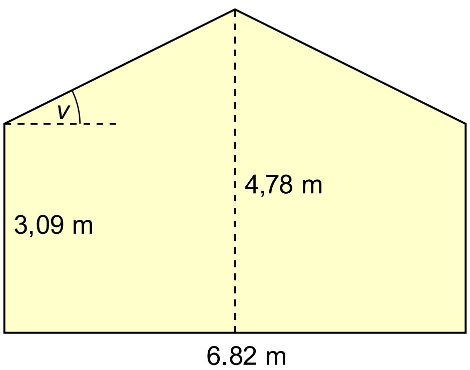
Opgave 6

I en vandret afstand på 41,2 m fra et træ, kan træets top ses under en vinkel på 32,8° i forhold til vandret. Bestem træets højde.



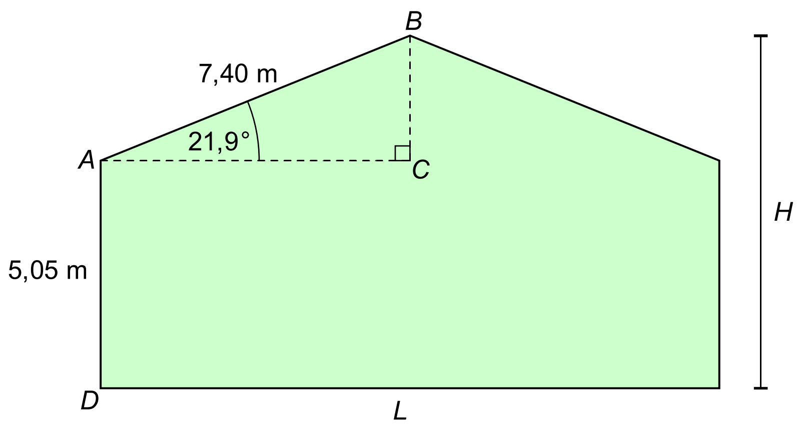
Opgave 7

I en bygning er målene som vist på figuren. Bestem tagets vinkel *v*, idet det oplyses, at gavlen er symmetrisk omkring den stiplede lodrette linje.



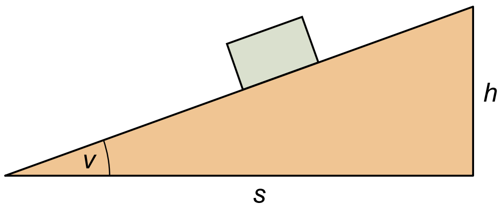
Opgave 8

En symmetrisk bygning har et tag, som hælder med 21,9°. Ellers er målene som anført på figuren. Bestem længden L af gavlen og højden H af bygningen.



Opgave 9

En klods glider ned ad et skråplan, hvis højde h er 3,38 m og hvis vandrette længde s er 9,45 m. Bestem den vinkel v, som skråplanet hælder med i forhold til vandret.



Opgave 10*

Ikke sjældent har man opgaver, som involverer bestemmelse af *projektioner*. Da kan nedenstående sætning være meget nyttig. Med den behøver man ikke regne i trekanter.

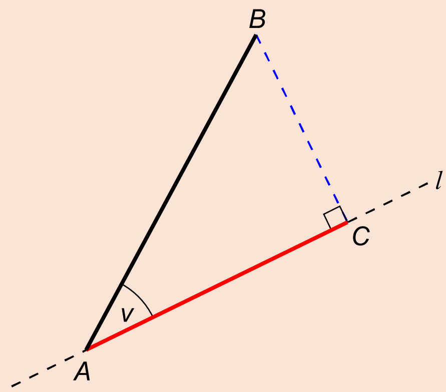
Sætning (Projektion)

Linjestykket AC er *projektionen* af linjestykket AB på linjen l, og længden fås ved at gange længden af AB med en cosinusfaktor:

$$|AC| = |AB| \cdot \cos(v)$$

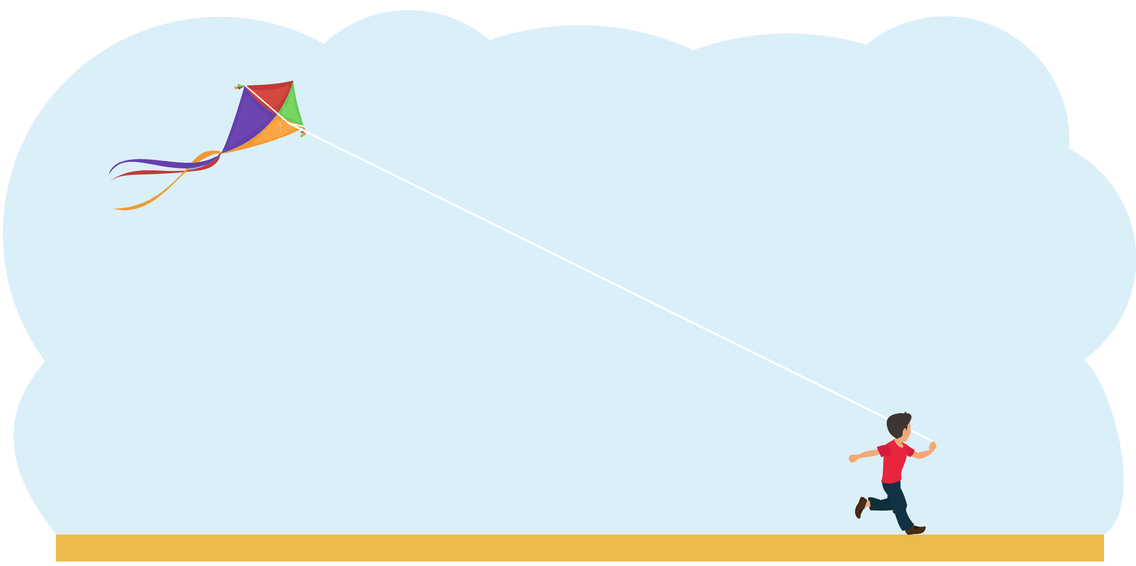
Den vinkelrette afstand $|BC|$ fås ved at gange med en sinusfaktor:

$$|BC| = |AB| \cdot \sin(v)$$



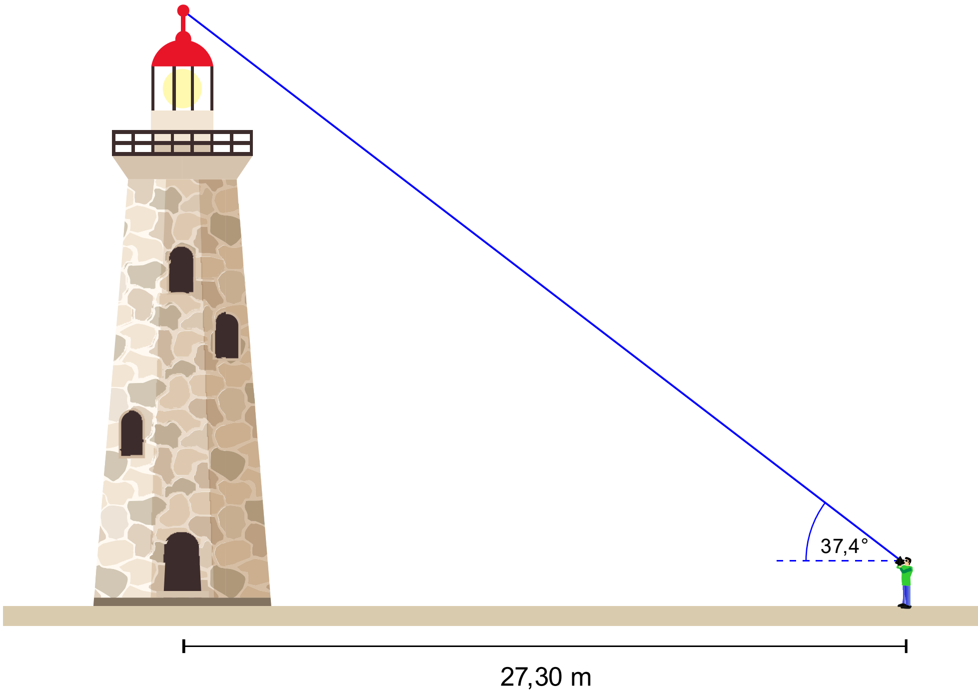
a) Bevis sætningen ved at regne i den retvinklede trekant ABC.

b) En dreng løber på stranden med en drage efter sig. Snoren er 30 meter lang og snoren danner en vinkel på 26,5° med vandret. Benyt projektionssætningen til at bestemme den *vandrette afstand* fra drengen til dragen. Bestem desuden, hvor højt dragen er oppe, når det oplyses, at drengen holder snoren i en højde af 1,0 meter.



Sætning 11

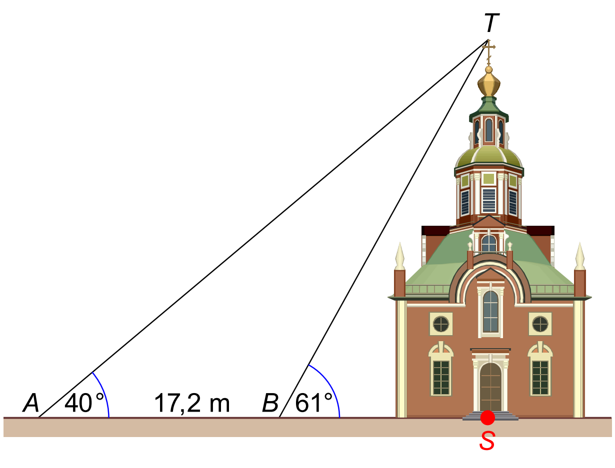
Anton ønsker at vurdere højden af et fyrtårn. Han stiller sig i afstanden 27,30 meter fra bunden og midten af tårnet og foretager en måling med sekstant. Han måler vinklen, som strålen fra tårnets top danner med vandret, til at være 37,4°. Bestem tårnets højde, idet det oplyses, at Antons øjenhøjde er 1,80 m.



Opgave 12**

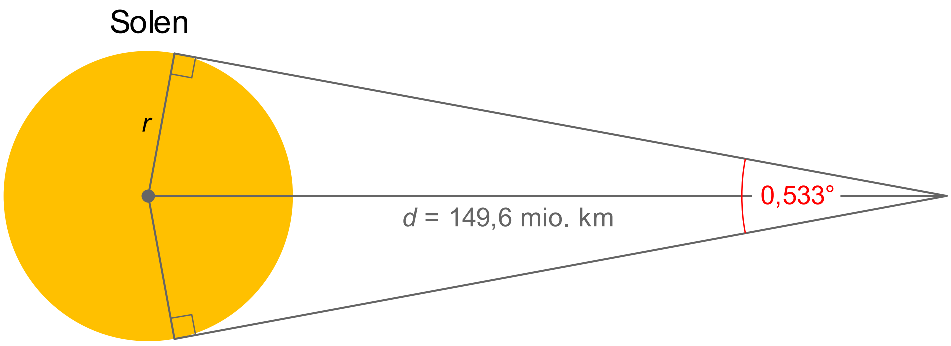
I punkterne A og B måles vinklerne til toppen af en høj bygning som henholdsvis 40° og 61° som vist på figuren. Afstanden mellem de to punkter A og B måles til 17,2 m. Bestem bygningens højde h.

Hjælp: Lad S være punktet på jorden lodret under tårnets højeste punkt T. Tårnets højde er da $h = |TS|$. Betragt de to retvinklede trekanter ATS og BTS. Sæt $x = |BS|$. Opstil et udtryk for h for hver af de to retvinklede trekanter og sæt dem lig med hinanden. Løs ligningen med hensyn til x, etc.



Opgave 13*

Solen befinder sig 149,6 mio. km fra Jorden. Når man fra Jorden kigger på Solen, så har den en *vinkeldiameter* på 0,533°. Benyt disse oplysninger til at bestemme Solens diameter. *Hjælp*: Regn enten i en af de retvinklede trekanter eller brug 2. del af projektionssætningen fra opgave 10.

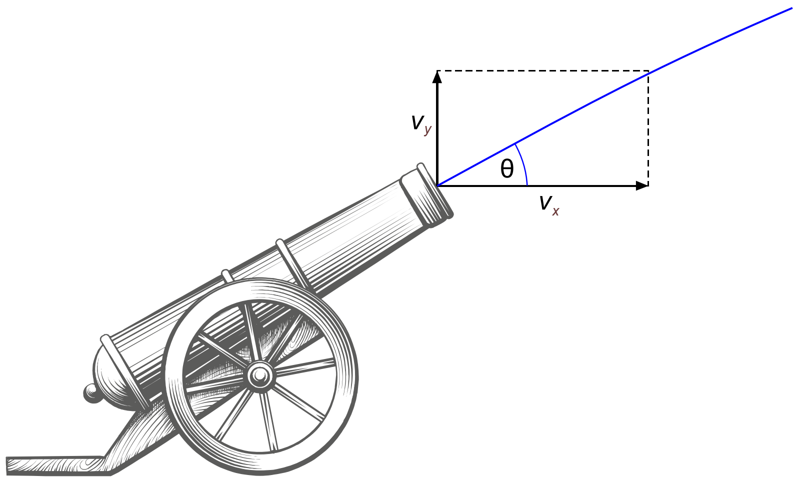


Opgave 14*

En kanon affyres, så kanonkuglens hastighed i startøjeblikket er 189 m/s i x-aksens retning og 103 m/s i y-aksens retning. Altså så $v_x = 189 \text{ m/s}$ og $v_y = 103 \text{ m/s}$.

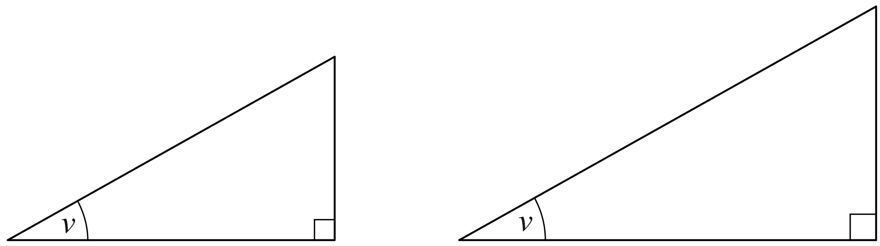
a) Bestem den vinkel θ, som kanonkuglen sendes afsted med regnet i forhold til vandret.

b) Bestem farten af kanonkuglen i affyringsøjeblikket.
Hjælp: Beregn diagonalens "længde".



Opgave 15*

Denne opgave er af teoretisk art. Overvej hvorfor definitionerne af sinus, cosinus og tangens er *veldefinerede*, dvs. at der *ikke* findes to forskellige retvinklede trekanter med *samme* vinkel v, hvor brøkerne i definitionerne af sinus, cosinus og tangens giver noget forskelligt (*Hjælp*: Tænk på ensvinklede trekanter, jf. figurerne på næste side.



□

Løsninger til udvalgte opgaver

Opgave 1:

a)	78,5	d)	37,1
b)	6,95	e)	42,5
c)	2,47	f)	57,7°

Opgave 2:

a) 55,0° b) 1597

Opgave 3:

a) 5,66 b) 49,9° c) 34,1°