Vækstmodeller

$\Delta x = a \cdot x$

$f(x) = b \cdot a^x$

- Modelegenskaber
- Lineære modeller
- Eksponentielle modeller
- Potensmodeller
- Logistiske modeller

$f(x) = a \cdot x + b$

%

$a = 1 + r$

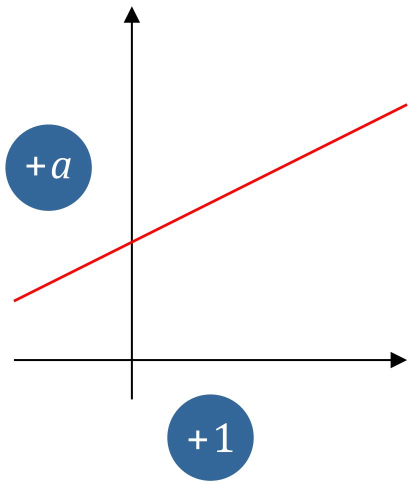
$f(x) = b \cdot x^a$

www.matematikfysik.dk

Modelegenskaber

$f(x) = a \cdot x + b$

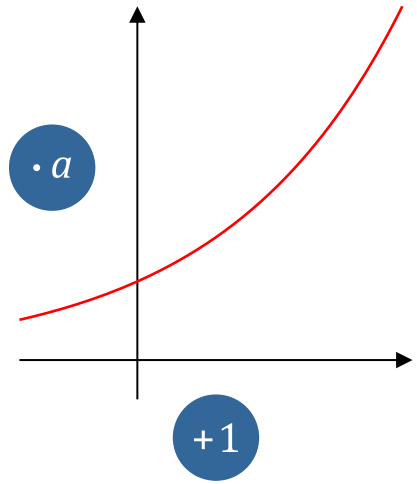
Lineær funktion



Hvis x ændrer sig lige meget hver gang, så ændrer y sig også lige meget hver gang.

$f(x) = b \cdot a^x$

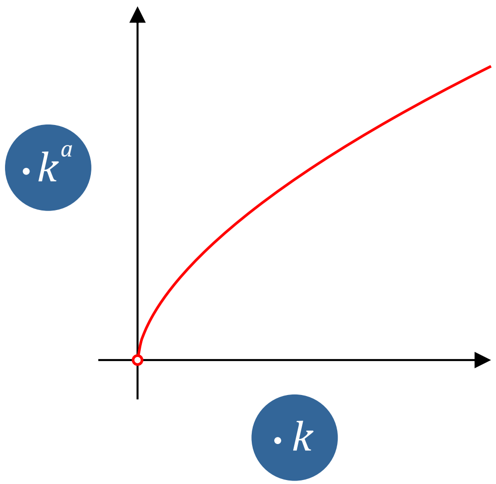
Eksponentiel funktion



Hvis x ændrer sig lige meget hver gang, så ændrer y sig med den samme **faktor** hver gang.

$f(x) = b \cdot x^a$

Potensfunktion



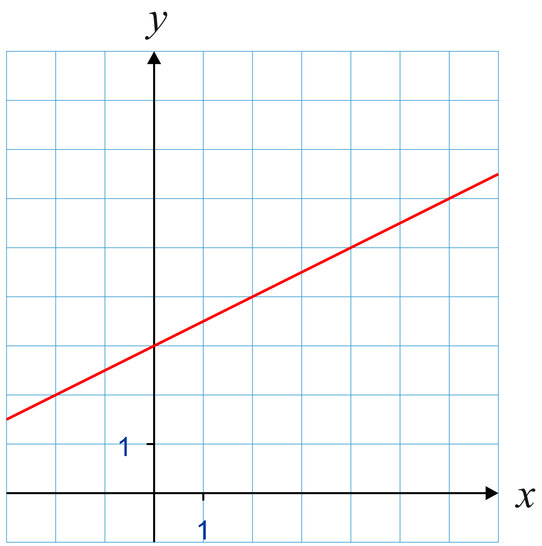
Hvis x ændrer sig med den samme **faktor** hver gang, så ændrer y sig også med den samme **faktor** hver gang.

Modelegenskaber - eksempler

Lineær funktion

$f(x) = 0{,}5x + 3$

+0,5

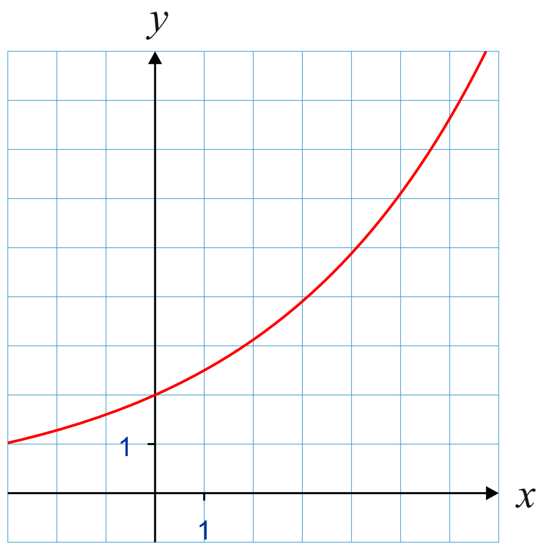


+1

Eksponentiel funktion

$f(x) = 2 \cdot 1{,}25^x$

$\cdot 1{,}25$
eller
+25%



+1

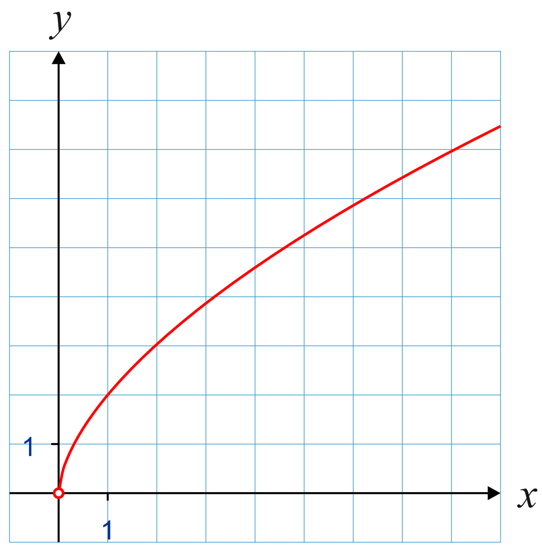
$$\boxed{r = a - 1}$$

$$\begin{aligned} r &= 1{,}25 - 1 \\ &= 0{,}25 \\ &= 25\% \end{aligned}$$

Potensfunktion

$f(x) = 2 \cdot x^{0{,}6}$

$\cdot 1{,}30^{0{,}6}$
$(\cdot 1{,}170)$
eller
+17,0%



$\cdot 1{,}30$ eller +30%

$$\boxed{1 + r_y = (1 + r_x)^a}$$

$$\begin{aligned} 1 + r_y &= (1 + 0{,}30)^{0{,}6} \\ 1 + r_y &= 1{,}30^{0{,}6} \\ 1 + r_y &= 1{,}170 \\ r_y &= 0{,}170 \\ r_y &= 17{,}0\% \end{aligned}$$

Lineær model (Taximodellen)

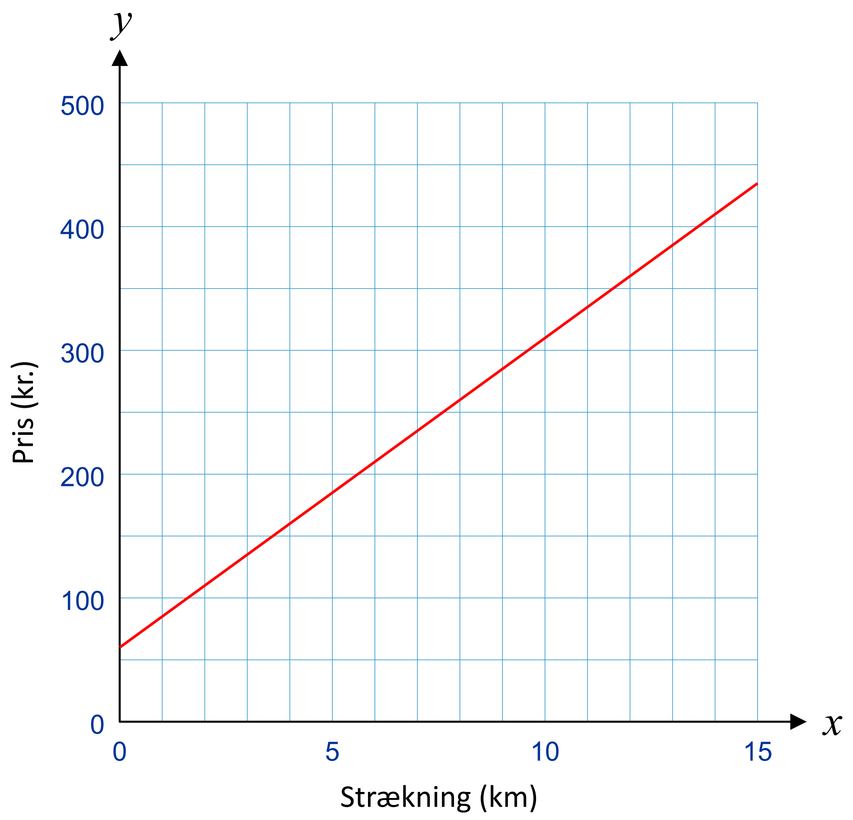
Et taxifirma har følgende betalingsmodel: Det koster et startgebyr på 60 kr. og derudover 25 kr. pr. kørt km. Opstil en lineær model, som beskriver prisen i kr. for at køre strækningen x, hvor sidstnævnte regnes i km.

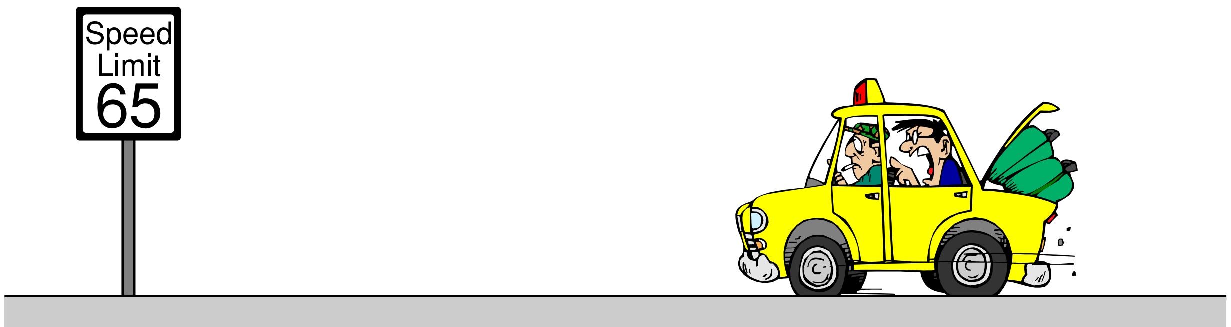
Løsning:

$$f(x) = 25x + 60$$

x : Antal kørte km
y : Samlet pris i kr.

Modellens begrænsninger: Den taget ikke højde for, at taxameteret normalt også tæller løs, når man holder stille for rødt. Skulle der tages højde for det, skulle der evt. have været en tidsmæssig variable med også ...





Lineær model (Alkoholpromille)

Nedbrydning af alkohol i en persons krop styres i høj grad af leverens omtrent faste kapacitet. Derfor er en lineær model rimelig til at beskrive nedbrydningen af alkohol.

En person har i løbet af en aften indtaget rigeligt med alkohol, men stopper så kl. 23 helt med at indtage alkohol.

I en model for personens alkoholpromille har vi:

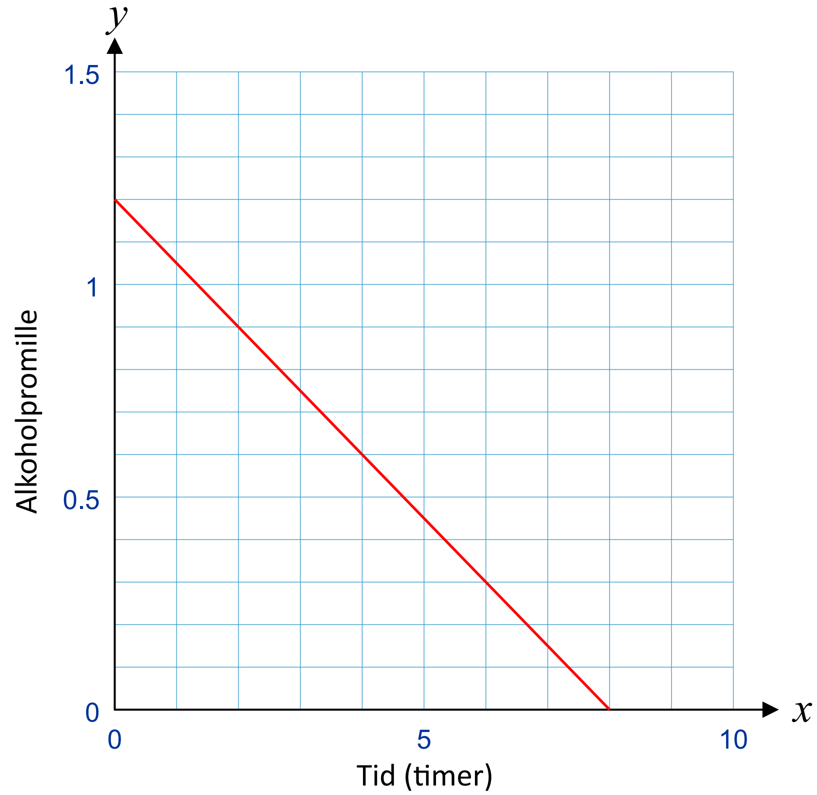
$$f(x) = -0{,}15x + 1{,}2$$

hvor x er antal timer efter kl. 23 og $f(x)$ er alkoholpromillen. Giv en fortolkning af $-0{,}15$ og $1{,}2$.

Løsning:

b-leddet 1,2 svarer til promillen kl. 23 (0 timer efter kl. 23), mens hældningskoefficienten $-0{,}15$ fortæller at alkoholpromillen falder med 0,15 pr. time (svarende til at y aftager med 0,15, når x vokser med 1).

Modellens begrænsninger: Mennesker nedbryder ikke alkohol lige hurtigt. Nedbrydningshastigheden afhænger blandt andet af kropsstørrelse, køn og stofskifte. Derfor vil hældningskoefficienten variere fra person til person.



Eksponentiel model (Bakteriemodel)

Det er ikke så mærkeligt, at bakterievækst ofte kan beskrives med en eksponentiel model. Bakterier formerer sig nemlig ved, at én bakterie deler sig i to. Derfor vil flere bakterier også føre til endnu flere nye bakterier. Populationen vil derfor typisk vokse med den samme procent pr. tidsenhed — i hvert fald så længe der er plads og næring nok.

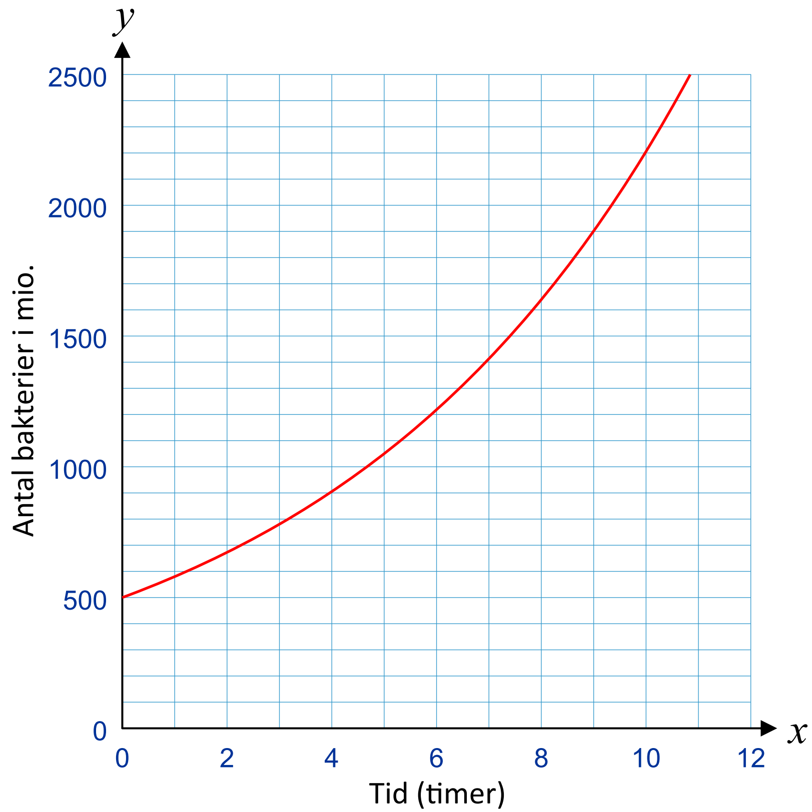
En bakteriekultur i en petriskål vokser med 16% pr. time og starter med at have 500 mio. bakterier. Opstil en model for antallet af bakterier i petriskålen som funktion af antal timer efter start.

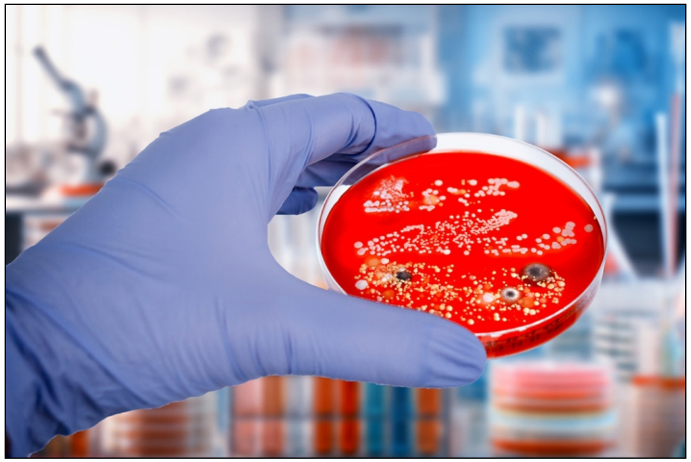
Løsning:
x : Antal timer efter start
y : Antal bakterier regnet i mio.

Vi har umiddelbart, at $b = 500$. Fremskrivningsfaktoren a kan bestemmes: $a = 1 + r = 1 + 0{,}16 = 1{,}16$. Dette giver:

$$f(x) = 500 \cdot 1{,}16^x$$

Modellens begrænsninger: Efterhånden som antallet af bakterier vokser, vil væksten blive hæmmet af manglende plads og manglende resurser. Derfor vil væksten aftage, indtil populationen nærmer sig en bestemt øvre grænse, kaldet *bæreevnen*. Når ressourcerne for alvor begynder at begrænse væksten, beskrives udviklingen ofte bedre af den såkaldte logistiske vækstmodel.





Eksponentiel model (Paracetamol)

Når man indtager et lægemiddel, vil det forsvinde ud af kroppen igen med tiden. I mange tilfælde aftager mængden af stoffet eksponentielt, fordi kroppen nedbryder og udskiller en fast procentdel pr. tidsenhed. Et godt eksempel er det kendte smertestillende middel paracetamol.

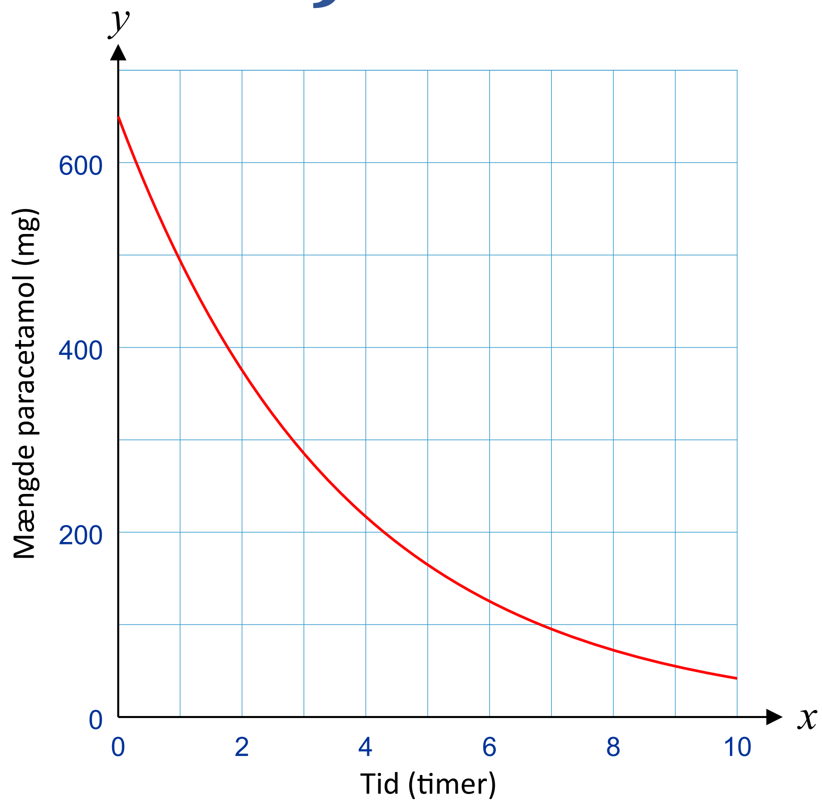
I en bestemt person aftog mængden af paracetamol i kroppen efter modellen:

$$f(x) = 650 \cdot 0{,}76^{x}$$

hvor x er antal timer efter indtagelsen og $f(x)$ er mængden af stoffet i mg. Vi kan bestemme vækstraten:

$$r = a - 1 = 0{,}76 - 1 = -0{,}24 = -24\%$$

Mængden af paracetamol i kroppen vil altså aftage med 24% pr. time. Ved starten er der 650 mg paracetamol i kroppen, svarende til mængden af paracetamol i den indtagne pille.



©iStock.com/Jorge Martinez

Potensmodel (Bremselængde)

I danske køreskoler lærer man ofte, at hvis hastigheden fordobles, så firedobles bremselængden. Mere generelt kan bremselængden beskrives ved følgende potenssammenhæng:

$$f(x) = b \cdot x^2$$

hvor x er bilens hastighed målt i km/t, og $f(x)$ er bremselængden målt i meter. Konstanten b afhænger blandt andet af friktionen mellem dæk og vejbanen. Det er et krav, at en almindelig personbil skal kunne standse inden for 6 m ved en hastighed på 30 km/t. Benyttes denne oplysning fås følgende potensfunktion:

$$f(x) = 1/150 \cdot x^2$$

Lad os nu undersøge, hvad der sker med bremselængden, hvis hastigheden øges med 50%. Vi har $r_x = 0{,}50$ og $a = 2$:

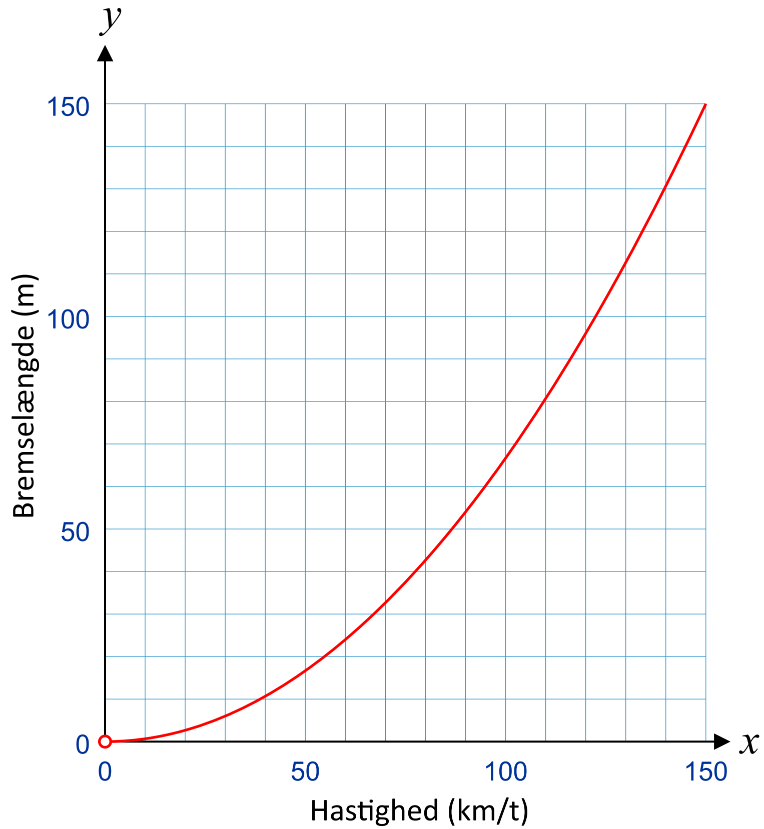
$$1 + r_y = (1 + r_x)^a$$

$$1 + r_y = (1 + 0{,}50)^2 = 2{,}25$$

$$r_y = 1{,}25 = 125\%$$

Når hastigheden øges med 50%, vil bremselængden altså vokse med 125%!

NB! For at få den samlede *standselængde* skal man også medregne den såkaldte *reaktionslængde*.

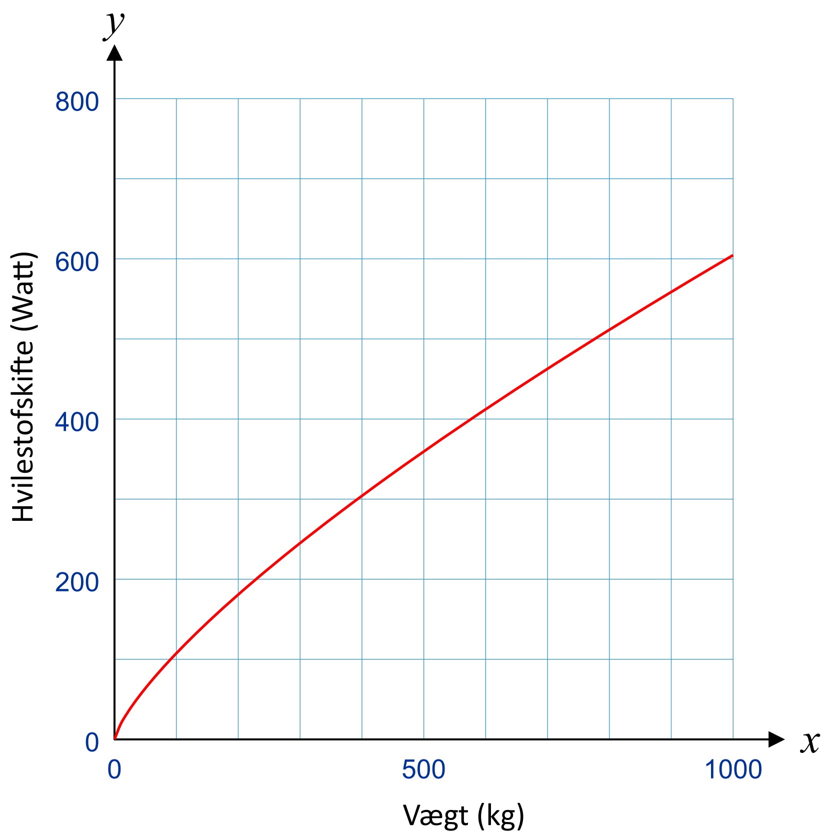


Potensmodel (Kleibers lov)

En anden interessant potensmodel er *Kleibers lov* i biologi. Denne empiriske lov er opkaldt efter den schweiziske biolog Max Kleiber, som i 1932 viste, at der er en systematisk sammenhæng mellem et dyrs kropsmasse og dets hvilestofskifte (*BMR*). Ifølge Kleibers lov kan sammenhængen beskrives ved modellen

$$f(x) = 3{,}4 \cdot x^{0{,}75}$$

hvor x er dyrets vægt i kilogram $f(x)$ er dyrets hvilestofskifte målt i watt.



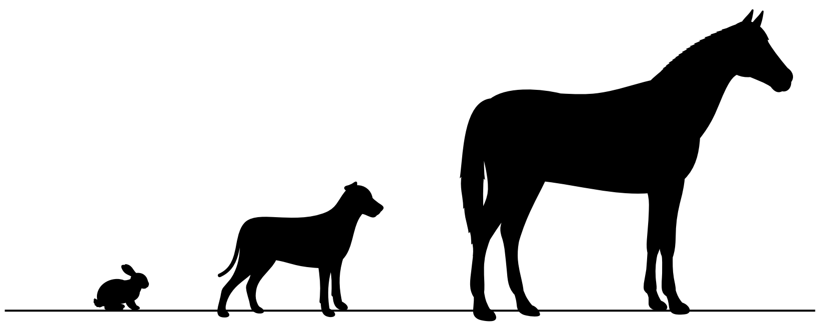
Lad os undersøge, hvor mange procent større hvilestofskiftet bliver for et dobbelt så tungt dyr. Vi gør som før, nu med $r_x = 1{,}00$ og $a = 0{,}75$:

$$1 + r_y = (1 + r_x)^a$$

$$1 + r_y = (1 + 1)^{0{,}75} = 1{,}682$$

$$r_y = 0{,}682 = 68{,}2\%$$

Et dobbelt så tungt dyr har altså kun cirka 68% større hvilestofskifte.



Potensmodel (Afstandskvadratloven)

Når lys udbreder sig fra en (tilnærmet) punktformig lyskilde, aftager lysets intensitet med afstanden efter loven:

$$f(x) = \frac{b}{x^2} = b \cdot x^{-2}$$

Modellen skyldes groft sagt, at den samme lysmængde fordeles over et større og større område, når afstanden til lyskilden vokser. Arealet af dette område vokser med afstanden i 2. potens. Dette er illustreret på figuren under grafen.

For en 9 W LED lyskilde haves følgende:

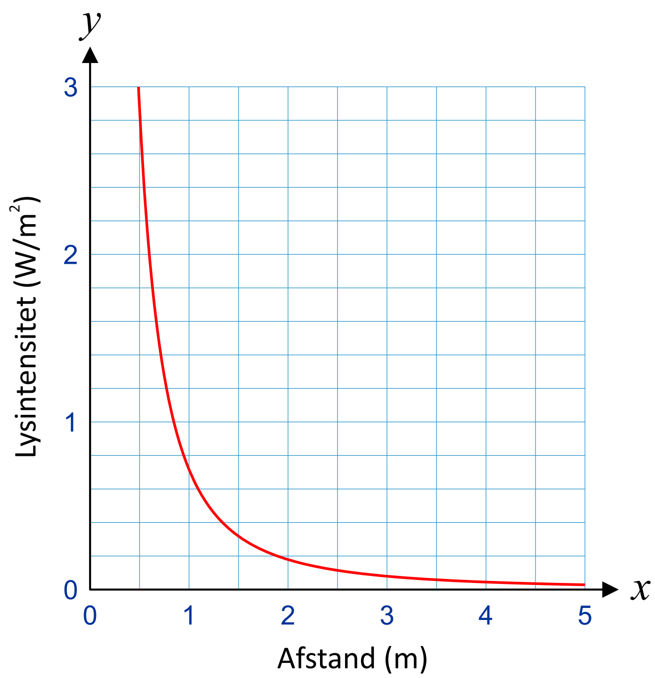
$$f(x) = 0{,}7162 \cdot x^{-2}$$

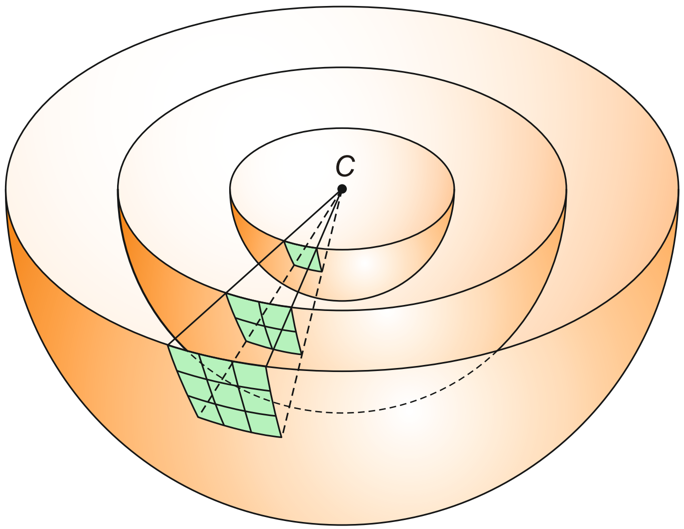
hvor x er afstanden til elpæren, regnet i meter, og $f(x)$ er lysintensisten målt i W/m^2 (Watt pr. kvadratmeter).

Det er ikke svært at indse, at når afstanden til lyskilden fordobles, vil lysintensiteten falde til 1/4 af den oprindelige. Det er nemmest at bruge fremskrivningsfaktoren k her direkte, med $a = -2$:

$$k = 2 \quad \text{giver} \quad k^a = 2^{-2} = \frac{1}{4}$$

Afstandskvadratloven er vigtig, da den finder anvendelse i mange situationer, blandt andet ved radioaktiv stråling og ved lys fra stjerner.





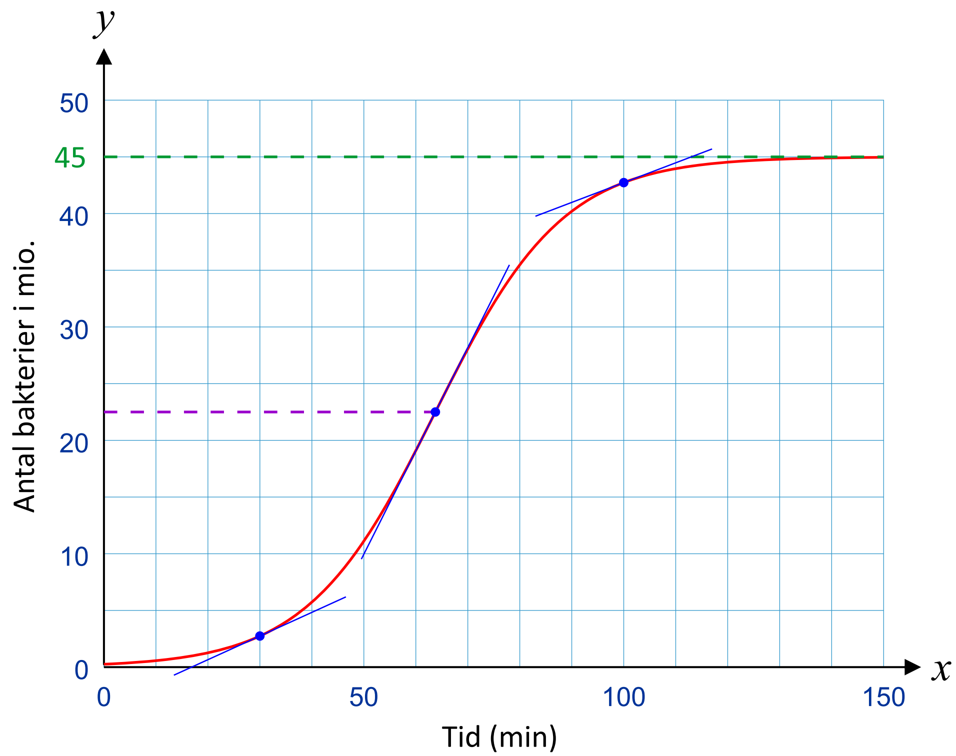
Den logistiske model (Bakteriemodel)

Til slut vil jeg demonstrere den såkaldte *logistiske model*, som i modsætning til den eksponentielle model tager hensyn til begrænset plads og begrænsede resurser i en population. Vi tænker os igen bakterier i en petriskål.

Forskriften for en logistisk vækst kan fx være:

$$f(x) = \frac{45}{1 + 175 \cdot \exp(-0{,}081x)}$$

hvor x er tiden målt i minutter, og $f(x)$ er antallet af bakterier målt i millioner. Grafen er vist til højre. Vi skal kun diskutere grafen kvalitativt.



Vi ser, at grafen i begyndelsen vokser langsomt, men derefter tager væksten kraftigt til. I denne fase kan udviklingen minde om eksponentiel vækst. Senere begynder grafen at flade ud og nærmer sig asymptotisk en værdi, som kaldes *bæreevnen*. Det er her, man kan forestille sig, at manglende ressourcer som føde og plads begynder at begrænse væksten.

Der er tegnet tangenter ind tre steder på grafen. Tangenternes hældning er et mål for, hvor hurtigt populationen vokser på det pågældende tidspunkt. Man kan vise, at den maksimale vaeksthastighed opnås, når populationen har nået halvdelen af sin bæreevne.