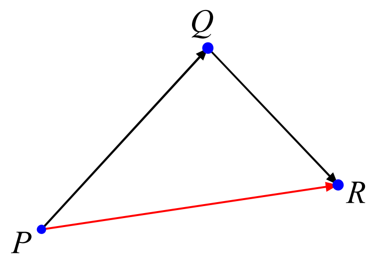
## Indskudsregel for vektorer

Lad $P$, $Q$ og $R$ være tre punkter i planen. Da gælder: $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$

*Forklaring*: Når man skal have vektoren fra et punkt $P$ til et punkt $R$, så kan man altså "indskyde" et punkt $Q$. Reglen fremgår direkte af, hvad vi allerede ved om det at lægge to vektorer sammen geometrisk.




Vi skal bruge indskudsreglen til at bevise en nyttig sætning.

**Sætning 1** (Midtpunktet på linjen mellem to punkter)

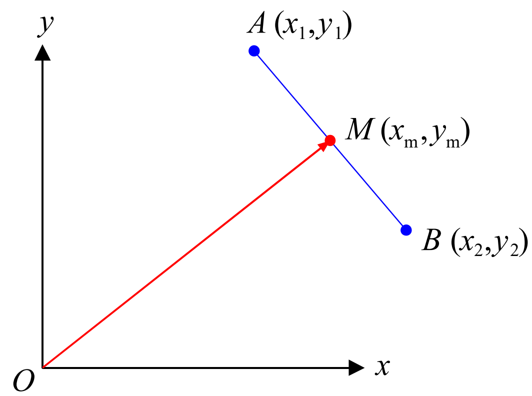
Givet punkterne $A(x_1, y_1)$ og $B(x_2, y_2)$. Midtpunktet $M$ på linjestykket mellem de to punkter har koordinaterne:

$$(x_{\mathrm{m}}, y_{\mathrm{m}}) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

Koordinaterne til $M$ fås altså ved at tage henholdsvis *gennemsnittet* af $x$-koordinaterne og *gennemsnittet* af $y$-koordinaterne.

*Bevis*: At bestemme koordinaterne til punktet $M$ svarer til at bestemme koordinaterne til stedvektoren $\overrightarrow{OM}$. For at klare det, skal vi gå omvejen omkring punktet $A$ og udnytte indskudsreglen. Vi udnytter desuden, at $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB}$.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OA} + \tfrac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB} \\
&= \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \tfrac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cdot (x_2 - x_1) \\ \frac{1}{2} \cdot (y_2 - y_1) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} x_2 - \frac{1}{2} x_1 \\ \frac{1}{2} y_2 - \frac{1}{2} y_1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x_1 + \frac{1}{2} x_2 - \frac{1}{2} x_1 \\ y_1 + \frac{1}{2} y_2 - \frac{1}{2} y_1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} x_1 + \frac{1}{2} x_2 \\ \frac{1}{2} y_1 + \frac{1}{2} y_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cdot (x_1 + x_2) \\ \frac{1}{2} \cdot (y_1 + y_2) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$




□

### Eksempel 2

Midtpunktet $M$ på linjestykket mellem punkterne $A(2,8)$ og $B(7,3)$ er ifølge sætning 1:

$$(x_{\mathrm{m}}, y_{\mathrm{m}}) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) = \left(\frac{2+7}{2}, \frac{8+3}{2}\right) = \left(\frac{9}{2}, \frac{11}{2}\right) = (4{,}5;\ 5{,}5)$$