Vinkel mellem to vektorer

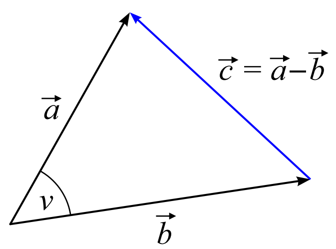
Vi skal i dette lille tillæg bevise en sætning, som finder anvendelse i mange sammenhænge såvel i plan som rumgeometrien.

Sætning 1

Lad v være vinklen mellem to egentlige vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$. Da gælder:

$$\cos(v) \;=\; \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$$

Bevis: Betragt figuren nedenfor: Hvis vi udover vektorerne $\vec{a}$ og $\vec{b}$ også tegner differensvektoren $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$, så får vi dannet en trekant.



Hvis vi benytter cosinusrelationen på længderne i trekanten, får vi:

(1) $$\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2 \;=\; |\vec{c}|^2 \;=\; |\vec{a}|^2 + \left|\vec{b}\right|^2 - 2\cdot|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos(v)$$

Lad os omskrive venstresiden i (1) ved at udnytte diverse regneregler for skalarproduktet, herunder blandt andet at skalarproduktet af en vektor med sig selv er lig med længden af vektoren i 2. potens:

(2) $$\begin{aligned}\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2 &= (\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})\\ &= \vec{a}\cdot\vec{a} - \vec{a}\cdot\vec{b} - \vec{b}\cdot\vec{a} + \vec{b}\cdot\vec{b}\\ &= \vec{a}\cdot\vec{a} - 2\cdot\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot\vec{b}\\ &= |\vec{a}|^2 - 2\cdot\vec{a}\cdot\vec{b} + \left|\vec{b}\right|^2\end{aligned}$$

Vi indsætter dette resultat på venstresiden i (1) og får derved:

(3) $$\begin{aligned}&|\vec{a}|^2 - 2\cdot\vec{a}\cdot\vec{b} + \left|\vec{b}\right|^2 \;=\; |\vec{a}|^2 + \left|\vec{b}\right|^2 - 2\cdot|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos(v)\\ &\Updownarrow\\ &-2\cdot\vec{a}\cdot\vec{b} \;=\; -2\cdot|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos(v)\\ &\Updownarrow\\ &\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|} \;=\; \cos(v)\end{aligned}$$

hvorved sætningen er bevist.

Sætning 1 kan også skrives på formen:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(v) \tag{4}$$

og denne lighed gælder endda i tilfældet, hvor en af vektorerne er nulvektor, som det ses ved en direkte inspektion. Vi skal nu bevise en meget vigtig sætning, som er en direkte konsekvens af (4).

Sætning 2

Lad $\vec{a}$ og $\vec{b}$ være to egentlige vektorer. Da gælder:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} \perp \vec{b}$$

Bevis: Vi har følgende:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(v) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos(v) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad v = 90^\circ \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} \perp \vec{b}$$

hvor vi i første ensbetydende tegn har benyttet (4) og i andet ensbetydende tegn har benyttet nulreglen. Endelig følger det tredje ensbetydende tegn af at vinklen mellem to vektorer altid er højst 180°.

□