

Integralregning og arealer 1

Nedenfor en række arbejdsopgaver, hvor du skal udregne bestemte integraler i hånden samt bestemme arealer i hånden. Først derefter kan resultaterne kontrolleres i dit CAS-værktøj. Når det handler om arealer, så prøv i dit CAS-værktøj at tegne grafen for funktionen og skraver det område, som man ønsker arealet af. NB! Her er det passende at sørge for ens skalering på akserne!

Husk først, at man med det *bestemte integral* af funktionen f fra a til b mener følgende tal, hvor F er en stamfunktion til f :

$$(1) \quad \int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Eksempel 1

Udregn det bestemte integral $\int_{-1}^2 2x^2 dx$.

Løsning: Vi bestemmer stamfunktionen til funktionen $f(x) = 2x^2$, indsætter grænserne og trækker fra:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^2 2x^2 dx &= \left[2 \cdot \frac{1}{2+1} x^{2+1} \right]_{-1}^2 = \left[\frac{2}{3} x^3 \right]_{-1}^2 \\ &= \frac{2}{3} \cdot 2^3 - \frac{2}{3} \cdot (-1)^3 = \frac{2}{3} \cdot 8 - \frac{2}{3} \cdot (-1) = \frac{16}{3} + \frac{2}{3} = \frac{18}{3} = 6 \end{aligned}$$

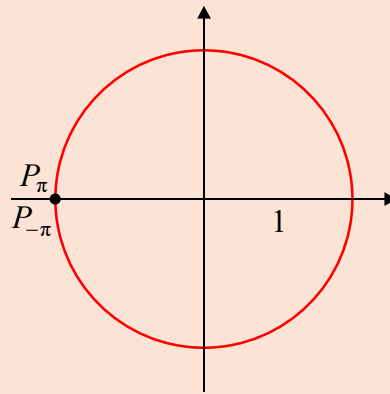
Eksempel 2

Bestem arealet under grafen for $f(x) = \cos(x) + 1$ fra $-\pi$ til π .

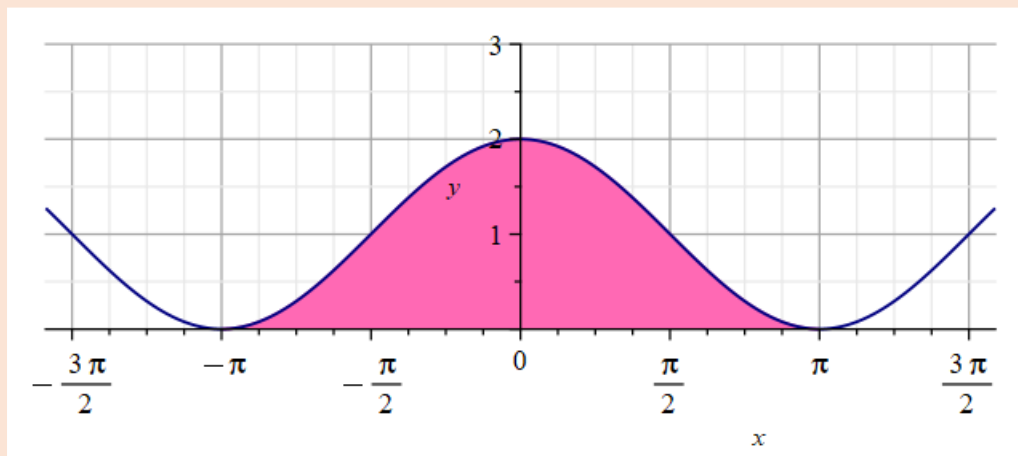
Løsning: Vi skal beregne det bestemte integral af $f(x) = \cos(x) + 1$ fra $-\pi$ til π . På grund af sumreglen for integraler, kan vi bestemme stamfunktionen for hele funktionen ved at integrere hvert led for sig. Stamfunktionen til $\cos(x)$ er ifølge formelsamlingen $\sin(x)$ og stamfunktionen til 1 er x . Derfor er $F(x) = \sin(x) + x$ en stamfunktion til f . Vi sætter grænser ind. Bemærk, at her skal vi til at kigge på enhedscirklen, som er vist å næste side. Husk at π svarer til 180° og $-\pi$ svarer til -180° . Retningspunkterne ligger her tilfældigvis i samme punkt $(-1, 0)$. Sinus er y -koordinaten, altså 0. Dermed er $\sin(\pi) = 0$ og $\sin(-\pi) = 0$. Vi får:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(x) + 1 dx &= [\sin(x) + x]_{-\pi}^{\pi} = (\sin(\pi) + \pi) - (\sin(-\pi) + (-\pi)) \\ &= (0 + \pi) - (0 - \pi) = \pi + \pi = 2\pi \approx 6,2832 \end{aligned}$$

fortsat...



Ved at bruge vores CAS-værktøj kan vi se, at det også giver resultatet 2π . Endelig vil vi tegne grafen for f og skraver det område, vi har bestemt arealet af:



NB! Bemærk, at grafen overalt ligger på eller over x -aksen!

Opgave 1 (Bestemt integral)

- Udregn manuelt det bestemte integral $\int_1^3 4x \, dx$.
- Kontroller resultatet i CAS-værktøjet.

Opgave 2 (Bestemt integral)

- a) Udregn manuelt det bestemte integral $\int_1^3 6x^2 - 4 dx$.
- b) Kontroller resultatet i CAS-værktøjet.

Opgave 3 (Bestemt integral)

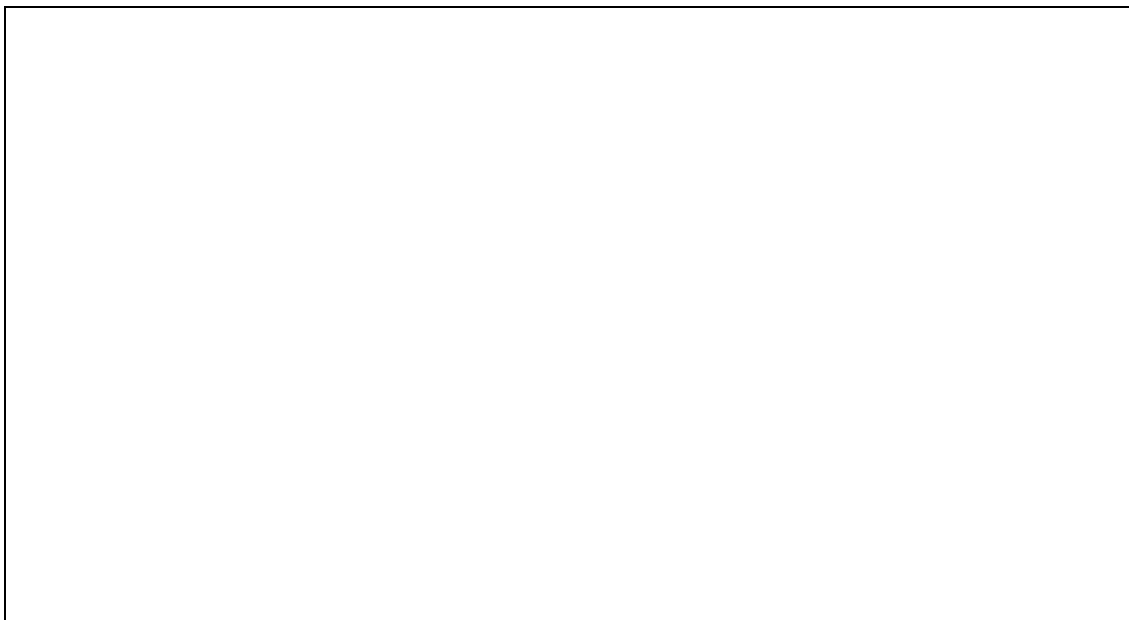
- a) Udregn manuelt det bestemte integral $\int_2^3 \frac{1}{x^2} dx$.

Hjælp: Husk at $\frac{1}{x^a} = x^{-a}$ og brug derefter reglen for at integrere en potensfunktion.

- b) Kontroller resultatet i CAS-værktøjet.

Opgave 4 (Areal)

- Bestem manuelt arealet under grafen for $f(x) = 4 - x^2$ fra 0 til 2.
- Kontroller resultatet på dit CAS-værktøj.
- Tegn desuden grafen for f i vinduet givet ved $-3 \leq x \leq 3, -1 \leq y \leq 5$. Prøv samtidigt at få CAS-værktøjet til at skrivere det område, du skal bestemme arealet af. Sørg også gerne for ens skalering på akserne.

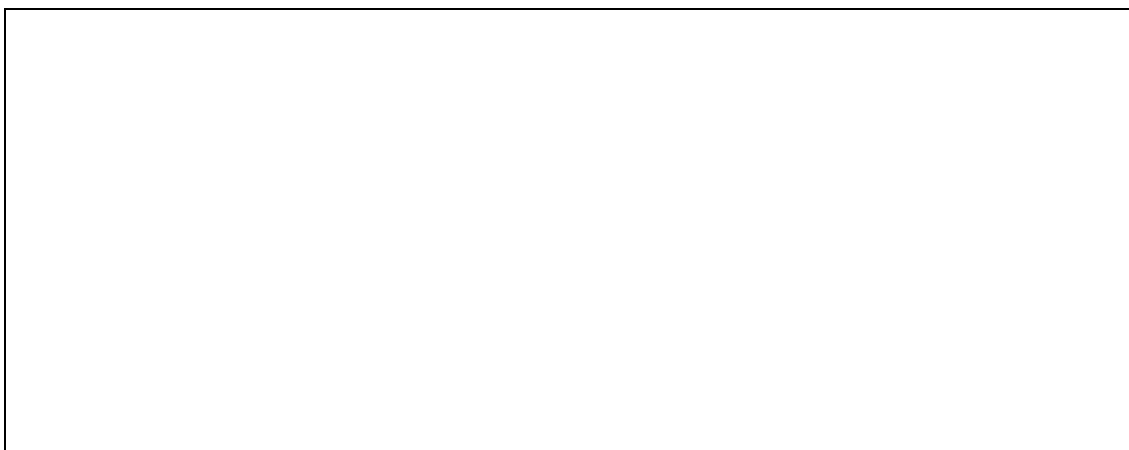


Opgave 5 (Areal)

- Bestem manuelt arealet under grafen for $f(x) = \frac{1}{x}$ fra 1 til 5.

Hjælp: Benyt formelsamlingen. Når du indsætter i stamfunktionen, kan du ikke manuelt udregne svaret i kommatal. Så undlad sidste skridt med at få det i kommatal.

- Kontroller resultatet på dit CAS-værktøj.
- Tegn desuden grafen for f i vinduet givet ved $-1 \leq x \leq 6, -1 \leq y \leq 4$. Prøv samtidigt at få CAS-værktøjet til at skrivere det område, du skal bestemme arealet af. Sørg også gerne for ens skalering på akserne.



Opgave 6 (Areal – eksperiment)

Denne opgave skal løses helt i dit CAS-værktøj. Eksperimenter med at designe en funktion, hvis graf ser spændende ud. Bestem dernæst arealet under grafen i et område, du også selv vælger. Sørg for at grafen i dette område ligger på eller over x -aksen.

Opgave 7 (Bestemt integral og areal)

Denne opgave skal løses helt i dit CAS-værktøj.

- Benyt CAS-værktøjet til at udregne integralet $\int_0^2 x^2 - 1 dx$.
- Tegn grafen for f i vinduet givet ved $-2 \leq x \leq 2$, $-2 \leq y \leq 4$, hvor du samtidigt skraverer området mellem grafen for f og x -aksen fra 0 til 2.
- Hvordan hænger integralet i a) sammen med arealet af det skraverede areal. Overvej, hvordan det skal forstås, når dele af grafen ligger under x -aksen.