Flere funktionsundersøgelser

Opgave 1

Betragt funktionen $f(x) = x \cdot \sqrt{x-2} - 3x$.

a) Bestem definitionsmængden. *Hjælp*: Overvej hvad x ikke må være. Hvad skal der gælde om det, der står inde under kvadratrodstegnet?
b) Bestem nulpunkterne for f .
c) Bestem monotoniforholdene for funktionen og bestem eventuelle lokale ekstrema.
d) Bestem et udtryk for tangenten til grafen for f i punktet $x_0 = 6$.
e) Grafen for f har en tangent, som er *parallel* med tangenten omtalt i d). Angiv første koordinaten til røringspunktet for denne tangent. *Hjælp*: Hvad kan man sige om hældningskoeffienterne på de to tangenter? Udnyt dette til at løse en ligning …
f) Tegn grafen for f i et passende interval.
g) Bestem værdimængden for f .

Opgave 2

Betragt funktionen $f(t) = \dfrac{300}{1+2\cdot e^{-0.65\cdot t}}$.

a) Argumenter for, at definitionsmængden for f er hele *R*. *Hjælp*: Husk at eksponentialfunktionen er defineret for alle tal. Hvad kan være problemet, når der er brøker involveret? Argumenter for, at det ikke bliver noget problem i dette tilfælde.
b) Vis, at funktionen er voksende i hele definitionsmængden.
c) Plot funktionen i intervallet $[-10, 20]$. Beskriv grafens udseende med ord.

Funktionen i denne opgave er et eksempel på en såkaldt *logistisk vækst*. Den finder undertiden anvendelse i biologi, hvor man forsøger at beskrive udviklingen af en population af dyr eller mikrober, hvor der er en begrænsende faktor tilstede såsom begrænset føde eller areal. Den ubekendte t vil da betyde tiden og y vil være antal individer i populationen. Her vil det være naturligt at sætte definitionsmængden til $t \in [0, \infty[$.

d) Bestem $f(0)$ samt $f'(0)$ og giv en fortolkning af de to størrelser med ovenstående model i tankerne.
e) Hvad sker der med $f(t)$, når t nærmer sig til uendelig? Giv en fortolkning af dette resultat.
f) Lad os i det følgende antage, at t er regnet i enheden timer. Hvornår er væksthastigheden i populationen oppe på 20 individer/time?
g) (Svær og frivillig). Hvad er den største væksthastighed og til hvilket tidspunkt indfinder den sig?

Bemærkning: Hvis du har A-niveau i matematik, kan du få en dybere forståelse af fænomenet logistisk vækst, når du kommer til emnet *differentialligninger*.

Opgave 3

Dette er en opgave med uafhængige blandede *parameteropgaver*, forstået på den måde, at der i forskrifterne for funktionerne indgår en ukendt parameter. Denne parameter a skal så bestemmes ud fra givne kriterier. Benyt i hvert tilfælde oplysningerne til at opstille en eller flere ligninger og løs den/dem.

a) Lad $f(x) = a \cdot x^2 + 4x - 2$. Bestem parameteren a således, at grafen for f i punktet $x_0 = 3$ har en tangent med hældning 7.

b) Lad $f(x) = x + \dfrac{5}{x} + a$. Bestem a, så grafen for f passerer igennem punktet $(4,8)$.

c) (*sværere*) Lad $f(x) = x^3 - 2x + a \cdot x + 8$. Bestem a, så $y = 17{,}5x - 8$ er en tangent til funktionens graf. *Hjælp*: Der er to ubekendte her, nemlig parameteren a samt førstekoordinaten x_0 til det punkt, hvor tangenten rører grafen. Du skal opstille to ligninger, som skal opfyldes. Kald $g(x) = 17{,}5x - 8$. Hvad skal der gælde om $f(x)$ og $g(x)$ og deres differentialkvotienter i x_0?

Bemærkning: For at forstå problemerne yderligere, kan man prøve at variere parameteren for at se, hvilken virkning det har på grafen. I spørgsmål b) kan man nærmest direkte sige det (Overvej). Ellers kan man fx bruge programmet *GeoGebra* til at variere parameteren. Dette program er særligt velegnet til det, selv om Maple også kan klare det.

Opgave 4

Lad $f(x) = 0{,}2x^2 + \dfrac{2x}{x+5}$.

Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet $x_0 = 5$. og bestem den vinkel, som tangenten danner i forhold til x-aksen (den spidse vinkel).

Opgave 5

Vis at funktionen $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x + 7$ har en *vandret vendetangent*. Bestem endvidere funktionens monotoniforhold.

Opgave 6 (svær)

Lad $f(x) = \dfrac{x+5}{2x^2 - 4x}$.

a) Bestem definitionsmængden for f.
b) Bestem nulpunkterne for f.
c) Bestem monotoniforholdene for f og angiv eventuelle steder, hvor der er lokalt ekstremum.
d) Angiv funktionens lodrette og vandrette asymptoter.
e) Tegn grafen for f i et passende interval og bestem værdimængden for funktionen.