

Opgaver i harmoniske funktioner

I nedenstående opgaver skal du arbejde med *harmoniske funktioner*, som typisk handler om funktioner, som indeholder de trigonometriske funktioner og har et periodisk forløb. Bemærk, at hvis du skal løse ligninger med sådanne funktioner i Maple, så skal du skrive din solve-kommando med nogle specielle options, for at få alle løsninger med. Alternativt kan man bruge kommandoen *intervalsolve* i *Gympakken*. Som et eksempel løser vi nedenfor ligningen $\sin(x) = 0,7$; $0 \leq x \leq 4\pi$. Se også nærmere i min Maple instruktionsnote: *Maple 6 – Ligninger* på siden www.matematikfysik.dk/cas.html.

```
restart
solve( { sin(x) = 0.7, 0 ≤ x ≤ 4 π }, AllSolutions, Explicit)
{x = 0.7753974966}, {x = 7.058582805}, {x = 2.366195158}, {x = 8.649380466}

with(Gym) :
intervalsolve(sin(x) = 0.7, x = 0 .. 4 π)
[0.7753974966, 2.366195157, 7.058582804, 8.649380464]
```

NB! Bemærk, at når du arbejder med *funktioner*, så regnes vinkler altid i radianer, så du skal *ikke* skrive de trigonometriske funktioner med stort begyndelsesbogstav, jf. *Gympakken*!

Opgave 1

I en elektrisk kreds er strømstyrken $I(t)$ givet ved følgende funktionsudtryk:

$$I(t) = 3,8 + 2,6 \cdot \sin(50 \cdot \pi \cdot t), \quad t \geq 0$$

hvor I er strømstyrken i ampere og t er tiden i sekunder.

- Bestem strømstyrken til tiden $t = 0$.
- Til hvilke tidspunkter i løbet af de første 5 hundrededele af et sekund er strømstyrken 5,0 A?
- Hvad er maksimum og minimum for funktionen?
Hjælp: Ikke nødvendigt at foretage funktionsundersøgelse her ...
- Tegn grafen for strømstyrken i intervallet $[0, 0,05]$.
- Bestem *perioden* (= svingningstiden) for svingningen.

Opgave 2

Temperaturen udenfor svinger i løbet af et døgn. På en solrig dag i begyndelsen af maj måned kan temperaturen tilnærmelsesvist beskrives ved funktionen

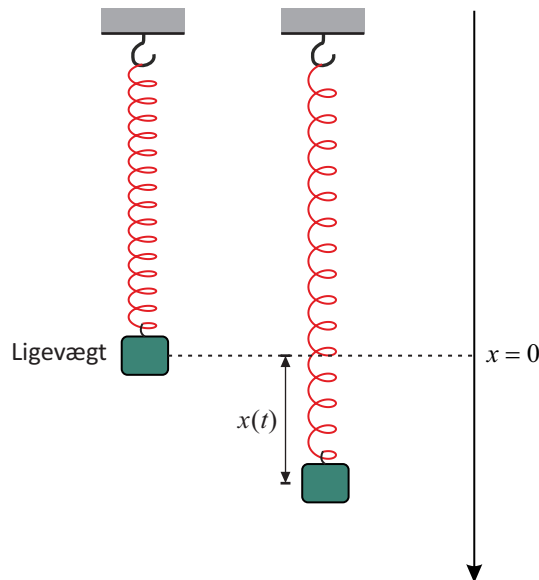
$$T(t) = 11,5 + 4,8 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{12} \cdot (t - 8)\right), \quad 0 \leq t \leq 24$$

hvor t er tiden i timer (efter midnat) og T er temperaturen i °C.

- Bestem den højeste og den laveste temperatur i løbet af et døgn, samt de tidspunkter på døgnet, hvor de forekommer.
- Bestem de tidspunkter på døgnet, hvor temperaturen er 14°C.
- Bestem $T'(10)$ og giv en fortolkning af dette resultat.

Opgave 3

Et lod med masse 100 g hænger i hvile i en fjeder på figuren til venstre. Loddet trækkes nu 8 cm ned og slippes, samtidigt med at et stopur startes. Derved vil loddet foretage en harmonisk bevægelse op og ned omkring ligevægtsniveauet.



Udstrækningen af fjederen i forhold til ligevægtsniveauet, regnet positiv nedad, betegner vi med $x(t)$. Det oplyses, at fjederkonstanten k for fjederen er 12 N/m. Man kan vise, at hvis fjederen kan regnes masseløs – hvilket er en god tilnærmelse, hvis fjederen er meget let i forhold til loddet – og der i øvrigt ikke er nogen luftmodstand i bevægelsen, så vil fjederens udstrækning som funktion af tiden t i sekunder være givet ved:

$$x(t) = 0,08 \cdot \cos(10,954 \cdot t)$$

hvor $x(t)$ er regnet i meter. *Svingningstiden* (også kaldet *perioden*) for en simpel harmonisk svingning som her er som bekendt defineret som tiden det tager at foretage en hel svingning. Den kan evt. bestemmes som tidsforskellen mellem to toppe eller bunde på grafen. Frekvensen f for en svingning er antal svingninger pr. sekund, dvs. vi har sammenhængen $f = 1/T$.

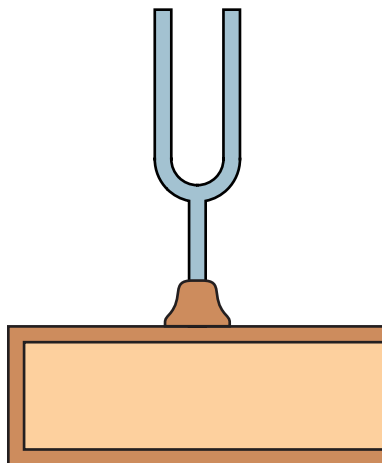
- a) Tegn grafen for $x(t)$ i intervallet fra 0 til 2 sekunder. Bestem svingningstiden ved at beregne tidsrummet mellem to toppe på grafen.

Vores svingning er på formen $A \cdot \cos(\omega \cdot t)$, hvor $\omega = 10,954$ (enhed: s^{-1}) kaldes *vinkeleghastigheden* og $A = 0,08$ (enhed: m) kaldes *amplituden*. Når størrelsen $\omega \cdot t$ ændrer sig med 2π , gennemføres en svingning. Det betyder at $\omega \cdot T = 2\pi \Leftrightarrow T = 2\pi/\omega$.

- b) Benyt ovenstående formel som en alternativ måde at bestemme svingningstiden på.
 c) Bestem frekvensen for svingningen.
 d) Hvor mange gange vil udsvinget være lig med 5 cm (dvs. 0,05 m) i løbet af de første 5 sekunder? Angiv blot antallet.
 e) Bestem $x'(1,4)$ og giv en fortolkning af resultatet.

Opgave 4

Som bekendt kan man frembringe en *ren* harmonisk tone ved at anslå en stemmegaffel. En sådan tone kan beskrives ved funktionen $y(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t)$, hvor t er tiden i sekunder og $y(t)$ er udsvinget til tidspunktet t . Størrelsen A er amplituden og den hænger sammen med hvor *kraftig* lyden er. Derimod hænger værdien for vinkelhastigheden ω sammen med hvor høj eller hvor dyb tonen er.



- a) Det kan være hensigtsmæssigt at have frekvensen i udtrykket i stedet for vinkelhastigheden, når der er tale om lydbølger. Redegør for, at $\omega = 2\pi \cdot f$, således at vores udtryk for bølgens udsving kan skrives: $y(t) = A \cdot \sin(2\pi \cdot f \cdot t)$.

Hjælp: Kig eventuelt på teksten efter spørgsmål a) i opgave 3.

- b) En stemmegaffel med *kammertonen* har en frekvens på $f = 440$ Hz. Lad os sige, at amplituden er 2, så vi får forskriften $y(t) = 2 \cdot \sin(2\pi \cdot 440 \cdot t)$. Bestem svingningstiden T for tonen.
- c) Benyt værdien for svingningstiden fra b) til at vurdere i hvilket interval, du skal tegne grafen for at få vist ca. 6 svingninger. Foretag dette plot.

Der findes også såkaldte *sammensatte* toner, hvormed menes, at tonerne består af en sum af 2 eller flere rene toner med forskellige frekvenser. Tonen med forskriften

$$z(t) = 2 \cdot \sin(2\pi \cdot 440 \cdot t) + 1,2 \cdot \sin(2\pi \cdot 880 \cdot t)$$

består af en *grundtone* på 440 Hz og en *overtone* med frekvensen 880 Hz. Hvis overtonerne som her har en frekvens, som er et multiplum af grundtonefrekvensen, opfattes lyden som behagelig, vellydende.

- d) Tegn grafen for $z(t)$ i samme interval som det interval du valgte i spørgsmål c). Hvordan vil du beskrive bølgen med ord?