Opgaver i integralregning

- uden hjælpemidler

I det følgende skal du bestemme en række integraler, både *ubestemte* og *bestemte*, UDEN brug af hjælpemidler. Først nogle regler og en liste med stamfunktioner.

Nr.	Navn	Regneregler for det ubestemt integral
(160)	Sumregel	$\int \big(f(x)+g(x)\big)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$
(161)	Differensregel	$\int \big(f(x)-g(x)\big)\,dx = \int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx$
(159)	Konstantregel	$\int k\cdot f(x)\,dx = k\cdot\int f(x)\,dx$
(162)	Integration ved substitution	$\int f(g(x))\cdot g'(x)\,dx = F(g(x))$

Tabel over stamfunktioner til elementære funktioner nedenfor. Husk at stamfunktioner *ikke* er entydige: Hvis man lægger en konstant til, er det også en stamfunktion, og der er ikke andre!

Nr.	$f(x)$	$F(x)$
	0	a
(148)	a	$a\cdot x$
	x	$\frac{1}{2}x^2$
(153)	$x^a \; (a \neq -1)$	$\frac{1}{a+1}\cdot x^{a+1}$
(154)	$\frac{1}{x} = x^{-1}$	$\ln\lvert x\rvert$
(155)	$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	$\frac{2}{3}x\cdot\sqrt{x} = \frac{2}{3}\cdot x^{\frac{3}{2}}$

Nr.	$f(x)$	$F(x)$
(150)	e^x	e^x
(151)	$e^{k\cdot x}$	$\frac{1}{k}\cdot e^{k\cdot x}$
(152)	a^x	$\frac{1}{\ln(a)}\cdot a^x$
(157)	$\sin(x)$	$-\cos(x)$
(156)	$\cos(x)$	$\sin(x)$
(149)	$\ln(x)$	$x\cdot\ln(x)-x$

Det *bestemte* integral fås ved at indsætte grænser i stamfunktionen $F(x)$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \big[F(x)\big]_a^b = F(b)-F(a)$$

Eksempel 1

Bestem uden hjælpemidler stamfunktionen til $f(x) = x^4 + e^{4x}$.

Løsning: Vi kan bruge sumreglen, hvor vi integrerer hvert led for sig. Første led er en potensfunktion, hvor vi kan benytte (153), mens andet led er en eksponentialfunktion, hvor vi bruger (151). Det giver følgende stamfunktion:

$$\int x^4 + e^{4x}\,dx \;=\; \int x^4\,dx \;+\; \int e^{4x}\,dx \;=\; \tfrac{1}{4+1}x^{4+1} + \tfrac{1}{4}e^{4x} = \tfrac{1}{5}x^5 + \tfrac{1}{4}e^{4x}$$

□

Eksempel 2

Bestem den stamfunktion til $f(x) = 6x^2$, som opfylder $f(2) = 3$.

Løsning: Vi benytter konstantreglen (159) samt regel (153) til at bestemme en stamfunktion til potensfunktionen:

$$\int 6x^2\,dx \;=\; 6\cdot\int x^2\,dx \;=\; 6\cdot\tfrac{1}{2+1}x^{2+1} \;=\; 6\cdot\tfrac{1}{3}x^3 \;=\; 2x^3$$

Enhver stamfunktion til funktionen *f* vil derfor være på formen $f(x) = 2x^3 + k$, hvor k er en konstant. Vi kan bestemme konstanten ved at indsætte punktet $(2,3)$:

$$3 = 2\cdot 2^3 + k \quad\Leftrightarrow\quad 3 = 16 + k \quad\Leftrightarrow\quad -13 = k$$

Dermed er $f(x) = 2x^3 - 13$ den ønskede stamfunktion.

□

Eksempel 3

Udregn det bestemte integral: $\int_{-1}^{2} (8x-1)\,dx$.

Løsning: Igen benyttes blandt andet regel (153):

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{2} (8x-1)\,dx \;&=\; \left[8\cdot\tfrac{1}{2}x^2 - x\right]_{-1}^{2}\\ &=\; \left[4x^2 - x\right]_{-1}^{2}\\ &=\; \left(4\cdot 2^2 - 2\right) - \left(4\cdot(-1)^2 - (-1)\right)\\ &=\; (16-2) - (4+1)\\ &=\; 14 - 5\\ &=\; 9\end{aligned}$$

Hvor vi i tredje trin indsætter først øverste grænse og derefter nederste grænse i udtrykket for stamfunktionen.

□

Eksempel 4

Benyt substitution til at udregne følgende ubestemte integral: $\int e^{3-5x}\,dx$.

Løsning: "Problembarnet" er den indre funktion $3-5x$. Vi vælger at substituere den med en ny variabel *t*. Dernæst differentierer vi den med hensyn til *x*, hvilket giver –5, som vi ser i boksen til højre. Uformelt fås derved sammenhængen $dt=-5\cdot dx$ og ved at isolere dx, fås endeligt $-\frac{1}{5}dt = dx$. Vi får herved:

$$t=3-5x \qquad \frac{dt}{dx}=-5 \qquad dt=-5\cdot dx \qquad -\tfrac{1}{5}dt=dx$$

$$\int e^{3-5x}\,dx \;=\; \int e^{t}\cdot(-\tfrac{1}{5}dt) \;=\; -\tfrac{1}{5}\cdot\int e^{t}\cdot dt \;=\; -\tfrac{1}{5}\cdot e^{t} \;=\; -\tfrac{1}{5}\cdot e^{3-5x}$$

hvor vi i første trin har udskiftet variable. Vi ender med at skulle integrere e^t, som er funktionen selv. Til sidst husker vi at skifte tilbage til den oprindelige variabel *x*.

Eksempel 5

Benyt substitution til at udregne følgende bestemte integral: $\int_1^2 \frac{4x}{x^2+1}\,dx$.

Løsning: Med vores "høgeblik" opdager vi, at nævneren differentieret er lig med tælleren på nær en multiplikativ konstant. Så vi vælger at erstatte nævneren med den variable *t*.

$$t=x^2+1 \qquad \frac{dt}{dx}=2x \qquad dt=2x\cdot dx \qquad \frac{1}{2x}dt=dx$$

t-grænser:

$x=1 \;\Rightarrow\; t=1^2+1=2$

$x=2 \;\Rightarrow\; t=2^2+1=5$

$$\int_1^2 \frac{4x}{x^2+1}\,dx \;=\; \int_1^2 4x\cdot\frac{1}{x^2+1}\,dx \;=\; \int_{x=1}^{2} 4x\cdot\frac{1}{t}\cdot\frac{1}{2x}\,dt$$

$$=\; \int_2^5 2\cdot\frac{1}{t}\,dt \;=\; 2\cdot\int_2^5 \frac{1}{t}\,dt \;=\; 2\cdot\Big[\ln|t|\Big]_2^5 \;=\; 2\cdot\big(\ln(5)-\ln(2)\big)$$

hvor vi først vælger at gange tælleren ned foran brøken. I trin 2 udskiftes nævneren med *t* ligesom dx udskiftes med udtrykket fra boksen til højre. Der er nu et mix af både *x* og *t*. Derfor præciseres, at grænserne stadig er *x*-grænser, ved at skrive $x=1$ i den nederste grænse. I trin 3 ser vi, at *x* forsvinder (havde den ikke gjort det, ville vi ikke kunne gennemføre substitutionen!). Så er der kun *t* tilbage. Det betyder også, at der skiftes til *t*-grænser ved at indsætte *x*-grænserne ind i $t=x^2+1$, som vist i boksen.

Bemærkning: Man kan godt alternativt vælge at bibeholde *x*-grænserne, hvis man til gengæld som i eksempel 4 går tilbage til *x*, før grænserne indsættes. Altså:

$$\int_1^2 \frac{4x}{x^2+1}\,dx \;=\; \int_1^2 4x\cdot\frac{1}{x^2+1}\,dx \;=\; \int_{x=1}^{2} 4x\cdot\frac{1}{t}\cdot\frac{1}{2x}\,dt$$

$$=\; \int_{x=1}^{2} 2\cdot\frac{1}{t}\,dt \;=\; 2\cdot\int_{x=1}^{2} \frac{1}{t}\,dt \;=\; 2\cdot\Big[\ln|t|\Big]_{x=1}^{2} \;=\; 2\cdot\Big[\ln\left|x^2+1\right|\Big]_1^2 \;=\; 2\cdot\big(\ln(5)-\ln(2)\big)$$

Opgaver

Opgave 1

Bestem uden hjælpemidler stamfunktioner til følgende funktioner, idet du gerne må bruge formelsamlingen.

a) $f(x) = 4x$ b) $f(x) = x^5$ c) $f(x) = 7$ d) e^{2x}

e) $f(x) = x + 2$ f) $f(x) = 4 \cdot \cos(x)$ g) $f(x) = \dfrac{3}{x}$ h) $f(x) = 2^x$

Opgave 2

Bestem uden hjælpemidler stamfunktioner til følgende funktioner, idet du gerne må bruge formelsamlingen.

a) $f(x) = x - \sin(x)$ b) $f(x) = e^x - 4$ c) $f(x) = 10 \cdot x^4$ d) $f(x) = e^{-x}$

Opgave 3

Bestem den stamfunktion til $f(x) = 2x + 1$, hvis graf går igennem punktet $(2,1)$.

Opgave 4

Bestem den stamfunktion til $f(x) = e^x - 6x$, som opfylder $f(0) = 3$.

Opgave 5

Udregn uden hjælpemidler følgende bestemte integraler:

a) $\displaystyle\int_0^2 6x\,dx$ b) $\displaystyle\int_0^1 (x^2 + 1)\,dx$ c) $\displaystyle\int_0^1 e^x\,dx$ d) $\displaystyle\int_0^\pi \sin(x)\,dx$

Opgave 6

Benyt substitution til at løse følgende ubestemte integraler.

a) $\displaystyle\int 5 \cdot \cos(5x + 1)\,dx$ b) $\displaystyle\int 2 \cdot e^{4x-3}\,dx$ c) $\displaystyle\int 4x \cdot e^{x^2-1}\,dx$ d) $\displaystyle\int \frac{4x}{2x^2 + 5}\,dx$

Opgave 7

Benyt substitution til at løse følgende bestemte integraler.

a) $\displaystyle\int_0^1 (3x - 1)^3\,dx$ b) $\displaystyle\int_0^2 6x \cdot (x^2 + 1)^2\,dx$ c) $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{x+1}\,dx$

Løsninger

Opgave 1:	a) $2x^2$	b) $\frac{1}{6}x^6$	c) $7x$	d) $\frac{1}{2}e^{2x}$
	e) $\frac{1}{2}x^2+2x$	f) $4\cdot\sin(x)$	g) $3\cdot\ln\lvert x\rvert$	h) $\frac{1}{\ln(2)}\cdot 2^x$
Opgave 2:	a) $\frac{1}{2}x^2+\cos(x)$	b) e^x-4x	c) $2\cdot x^5$	d) $-e^{-x}$
Opgave 3:	x^2+x-5			
Opgave 4:	e^x-3x^2+4			
Opgave 5:	a) 12	b) $\frac{4}{3}$	c) $e-1$	d) 2
Opgave 6:	a) $\sin(5x+1)$	b) $\frac{1}{2}\cdot e^{4x-3}$	c) $2\cdot e^{x^2-1}$	d) $\ln\lvert 2x^2+5\rvert$
Opgave 7:	a) $\frac{5}{4}$	b) 7	c) $\ln(3)$	