

# Trigonometri for fysikere

Vi har i tillægget *Trigonometri - Definitioner via retvinklet trekant* set, hvordan de trigonometriske funktioner sinus, cosinus og tangens kan benyttes til at foretage beregninger i retvinklede trekanter. I de naturvidenskabelige fag ser man ofte de trigonometriske funktioner anvendt. Det er ikke mindst tilfældet i fysik. En af de grundlæggende teknikker her er begrebet *projektion*.

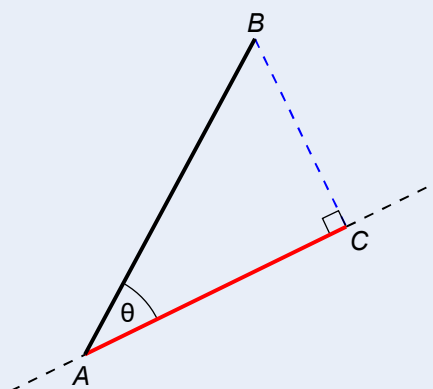
## Sætning (Projektion)

Linjestykket  $AC$  er *projektion* af linjestykket  $AB$  på linjen  $l$  og længden fås ved at gange længden af  $AB$  med en cosinusfaktor:

$$|AC| = |AB| \cdot \cos(\theta)$$

Den vinkelrette afstand  $|BC|$  fås ved at gange med en sinusfaktor:

$$|BC| = |AB| \cdot \sin(\theta)$$



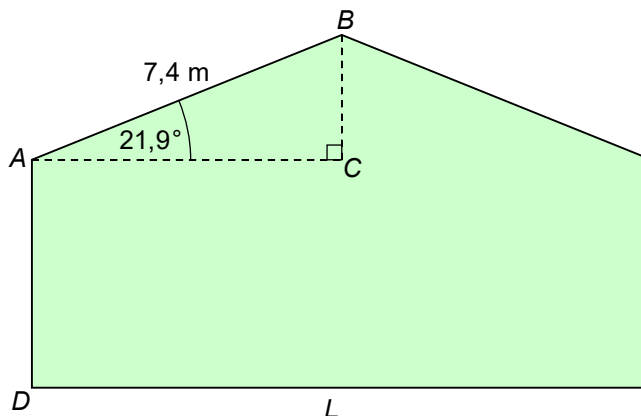
*Bevis:* I den retvinklede trekant  $ABC$  har vi umiddelbart:

$$\cos(\theta) = \frac{\text{hosliggende katete}}{\text{hypotenusen}} = \frac{|AC|}{|AB|} \Leftrightarrow |AC| = |AB| \cdot \cos(\theta)$$

Formlen for den lodrette afstand fås på tilsvarende vis. Detaljerne overlades til læseren.  $\square$

## Eksempel 1

Figuren nedenfor viser et hus, hvor et tag med længden 7,4 m hælder med  $21,9^\circ$  i forhold til vandret. Huset oplyses at være symmetrisk omkring den lodrette akse gennem spidsen af huset. Vi ønsker at bestemme husets længde  $L$ .



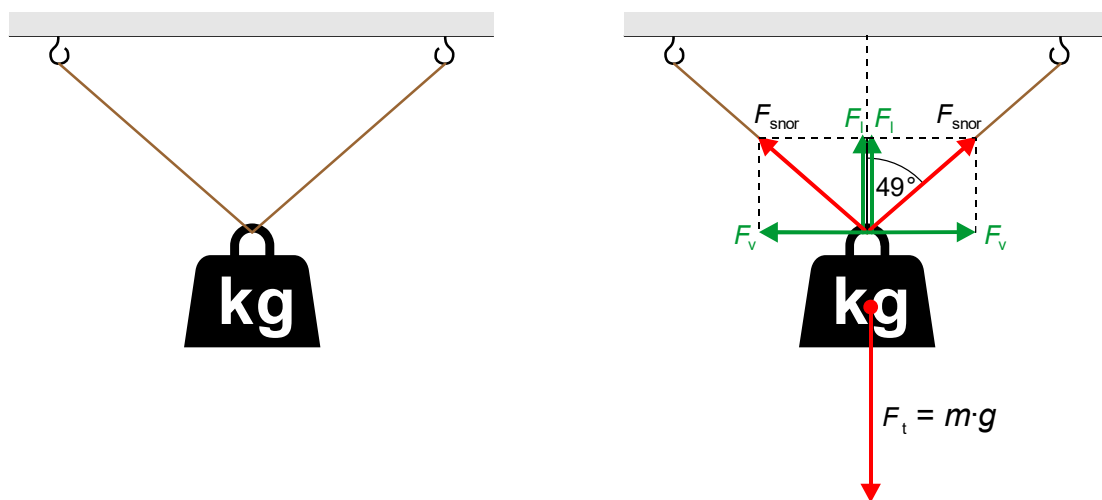
*Løsning:* Projektionen af  $AB$  på en vandret linje gennem  $A$  er linjestykket  $AC$ . Ganger vi længden af dette stykke med 2, fås husets længde. Ifølge sætningen fås altså:

$$L = 2 \cdot |AC| = 2 \cdot |AB| \cdot \cos(\theta) = 2 \cdot 7,4 \text{ m} \cdot \cos(21,9^\circ) = 13,73 \text{ m}$$

□

### Eksempel 2

Når man regner med kræfter i mekanik, kan det ofte være en fordel at *opløse en vektor i to komponenter* – en vandret og en lodret. Nedenfor ser vi en vægt hængt i en snor fra to kroge i loftet. Det oplyses, at vægten masse er 4,75 kg. Vi kan nemt bestemme tyngdekraften på vægten ved hjælp af formlen  $F_t = m \cdot g$ , men hvor store er snorkræfterne, når det oplyses, at snorenes vinkel i forhold til lodret er  $49^\circ$ ?



*Løsning:* Da vægten hænger i hvile, kan vi konkludere, at de samlede kræfter på vægten må være 0 (nulvektor) – ellers ville vægten accelerere i en eller anden retning ifølge Newtons 2. lov. Vi gør nu det, at vi opløser hver af snorkræfterne i en *lodret komponent*  $F_l$  og en *vandret komponent*  $F_v$ . De to røde snorkræfter erstattes altså af de fire grønne kræfter. De vandrette komponenter er lige store og modsatrettede og udligner derfor hinanden. I lodret retning får vi:  $2 \cdot F_l = F_t$ . Sætningen giver:  $F_l = F_{snor} \cdot \cos(\theta)$ . Alt i alt haves:

$$2 \cdot F_{snor} \cdot \cos(\theta) = m \cdot g \Leftrightarrow F_{snor} = \frac{m \cdot g}{2 \cdot \cos(\theta)}$$

Med indsatte talværdier fås:

$$F_{snor} = \frac{m \cdot g}{2 \cdot \cos(\theta)} = \frac{4,75 \text{ m} \cdot 9,82 \text{ m/s}^2}{2 \cdot \cos(49^\circ)} = 35,5 \text{ N}$$

□

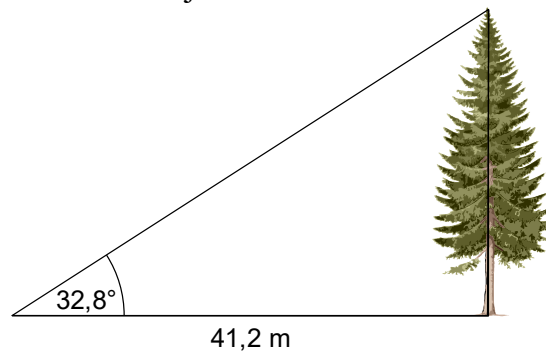
## Opgaver

### Opgave 1

Kig igen på huset i eksempel 1. Bestem husets maksimale højde, når det oplyses, at højden  $AD$  er 5,05 m.

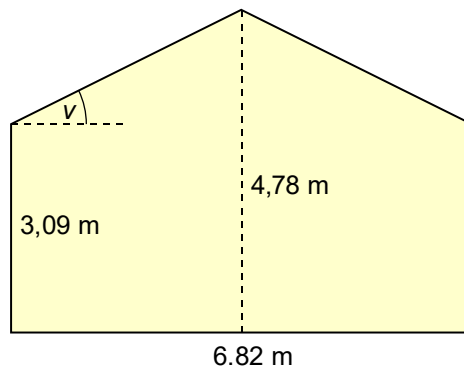
### Opgave 2

I en vandret afstand på 41,2 m fra et træ, kan træets top ses under en vinkel på  $32,8^\circ$  i forhold til vandret. Bestem træets højde.



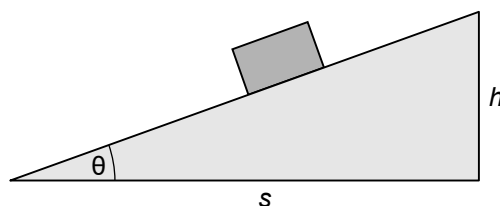
### Opgave 3

I en bygning er målene som vist på figuren. Bestem tagets vinkel  $v$ , idet det oplyses, at gavlen er symmetrisk omkring den stiplede lodrette linje.



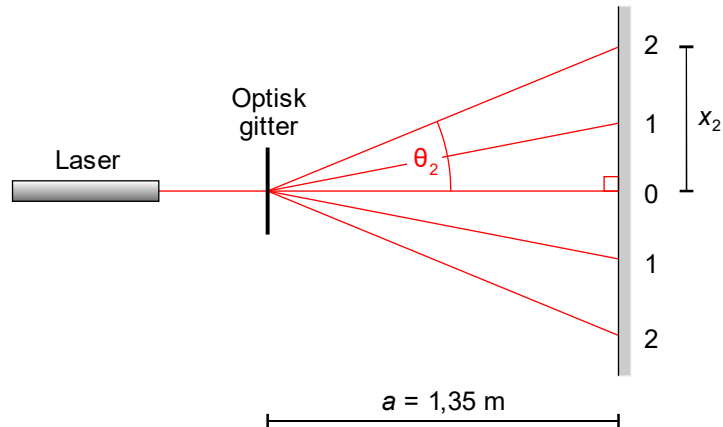
### Opgave 4

En klods glider ned ad et skråplan, hvis højde  $h$  er 3,38 m og hvis vandrette længde  $s$  er 9,45 m. Bestem den vinkel  $\theta$ , som skråplanet hælder med.



### Opgave 5

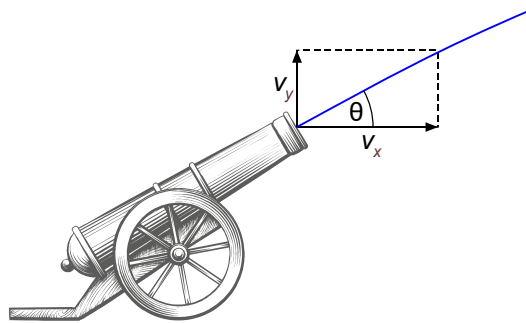
En laserstråle sendes vinkelret ind imod et optisk gitter. 2. ordensstrålen afbøjes herved i en vinkel på  $\theta_2 = 22,3^\circ$ . Bestem afstanden  $x_2$  mellem 0. ordensprikken og 2. ordensprikken på en væg, som befinder sig i afstanden 1,35 m bag det optiske gitter.



### Opgave 6

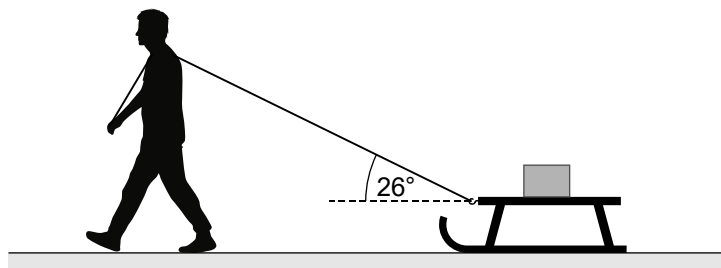
En kanonkugle sendes afsted, så den i startøjeblikket har en vandret hastighedskomponent  $v_x$  af størrelsen 189 m/s og en lodret hastighedskomponent  $v_y$  af størrelsen 103 m/s.

- Bestem den vinkel, som kanonkuglen sendes afsted i.
- Bestem *farten* af kanonkuglen i startøjeblikket.



### Opgave 7

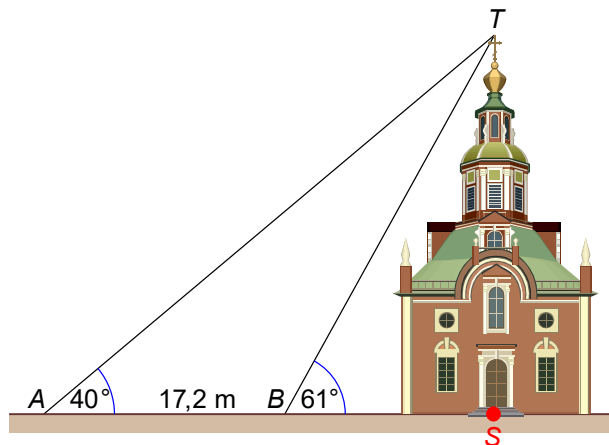
En mand trækker en kælk med en last stykket  $s = 50 \text{ m}$  langs et vandret underlag. Trækraften  $F_{\text{træk}} = 25 \text{ N}$  danner en vinkel på  $\alpha = 26^\circ$  i forhold til vandret. Bestem *trækraftens arbejde*  $A$ , idet det oplyses, at den kan bestemmes af formlen  $A = F_{\text{træk}} \cdot s \cdot \cos(\alpha)$ .



**Opgave 8 (Svær)**

I punkterne  $A$  og  $B$  måles vinklerne til toppen af en høj bygning som henholdsvis  $40^\circ$  og  $61^\circ$  som vist på figuren. Afstanden mellem de to punkter  $A$  og  $B$  måles til 17,2 m. Bestem bygningens højde  $h$ .

*Hjælp:* Lad  $S$  være punktet på jorden lodret under tårnets højeste punkt  $T$ . Tårnets højde er da  $h = |TS|$ . Betragt de to retvinklede trekanter  $ATS$  og  $BTS$ . Sæt  $x = |BS|$ . Opstil et udtryk for  $h$  for hver af de to retvinklede trekanter og sæt dem lig med hinanden. Løs ligningen med hensyn til  $x$ , etc.

**Svar**

- |                  |             |                 |                 |            |
|------------------|-------------|-----------------|-----------------|------------|
| 1) 7,81 m        | 2) 26,55 m  | 3) $26,4^\circ$ | 4) $19,7^\circ$ | 5) 0,554 m |
| 6a) $28,6^\circ$ | 6b) 215 m/s | 7) 1123 J       | 8) 26,98 m      |            |